Roland Bulirsch

Alfred Pringsheim der Mathematiker

Was er sah, war sinnverwirrend. Ein phantastischer Hokuspokus, ein Hexensabbat verschränkter Runen bedeckte die Seiten. Griechische Schriftzeichen waren mit lateinischen und mit Ziffern in verschiedener Höhe verkoppelt, mit Kreuzen und Strichen durchsetzt, ober- und unterhalb waagrechter Linien bruchartig aufgereiht, durch andere Linien zeltartig überdacht, durch Doppelstrichelchen gleichgewertet, durch runde Klammern zu großen Formelmassen vereinigt. Einzelne Buchstaben, wie Schildwachen vorgeschoben, waren rechts oberhalb der umklammerten Gruppen ausgesetzt. Kabbalistische Male, vollständig unverständlich dem Laiensinn, umfaßten mit ihren Armen Buchstaben und Zahlen, während Zahlenbrüche ihnen voranstanden und Zahlen und Buchstaben ihnen zu Häupten und Füßen schwebten. Sonderbare Silben, Abkürzungen geheimnisvoller Worte waren überall eingestreut, und zwischen den nekromantischen Kolonnen standen geschriebene Sätze und Bemerkungen in täglicher Sprache, deren Sinn gleichwohl so hoch über allen menschlichen Dingen war, daß man sie lesen konnte, ohne mehr davon zu verstehen, als von einem Zaubergemurmel.

$$\varphi_n(x) = \sum_0^{n-1} {}^{\nu} \left\{ \begin{array}{l} A_{\nu+1,\nu+1} \qquad + A_{\nu,\nu+2}\cos 2x + \cdots + A_{1,2\nu+1}\cos 2\nu x \\ A_{\nu+1,\nu+2}\cos x + A_{\nu,\nu+3}\cos 3x + \cdots + A_{1,2\nu+2}\cos(2\nu+1)x \end{array} \right\}$$

$$= \sum_0^{n-1} {}^{\nu} \left\{ \cos 2\nu x \sum_1^{n-\nu} {}^{\varkappa} A_{\varkappa,\varkappa+2\nu} + \cos(2\nu+1)x \sum_1^{n-\nu} {}^{\varkappa} A_{\varkappa,\varkappa+2\nu+1} \right\}$$

$$\Phi_n(x) = \sum_0^{n-1} {}^{\nu} \left\{ \cos 2\nu x \sum_1^{\infty} A_{\varkappa,\varkappa+2\nu} + \cos(2\nu+1)x \sum_1^{\infty} {}^{\varkappa} A_{\varkappa,\varkappa+2\nu+1} \right\}$$

und daher

$$\Delta_n = \Phi_n(x) - \varphi_n(x)$$

$$= \sum_0^{n-1} {}^{\nu} \left\{ \cos 2\nu x \sum_{n-\nu+1}^{\infty} {}^{\varkappa} A_{\varkappa,\varkappa+2\nu} + \cos(2\nu+1) \right.$$

$$= \sum_0^{n-1} {}^{\nu} \cos 2\nu x \sum_1^{\infty} {}^{\varkappa} A_{\varkappa+n-\nu,\varkappa+n+\nu} + \cos(2\nu$$

oder wenn noch

$$(7) \qquad \sum_1^{\infty} {}^{\varkappa} A_{\varkappa+\mu,\varkappa+\nu} =$$

gesetzt wird:

$$(8) \qquad \Delta_n = \sum_0^{n-1} {}^{\nu} \left\{ C_{n-\nu,n+\nu} \cos 2\nu x + C_{n-} \right.$$

$$(64) \quad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = \frac{K_{11}}{2C} \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c^2y^2)}} - \frac{K_{11}+2K_{12}}{2L} \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(\lambda-l^2y^2}}, \\ \displaystyle\int_0^x \frac{x\,dx}{\sqrt{R(x)}} = \frac{K_{21}}{2C} \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c^2y_2)}} - \frac{K_{21}+2K_{22}}{2L} \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-l^2y^2)}}, \end{array} \right.$$

Andrerseits findet man aber durch unmittelbares Einsetzen der algebraischen Substitutionen (62):

$$(65) \quad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c^2y^2)}} = \tfrac{1}{2}\varkappa_1\lambda_1 \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} - \tfrac{1}{2}\varkappa\lambda\varkappa_1\lambda_1 \int_0^x \frac{x\,dx}{\sqrt{R(x)}}, \\ \displaystyle\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-l^2y^2)}} = \tfrac{1}{2}\varkappa_1\lambda_1 \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} + \tfrac{1}{2}\varkappa\lambda\varkappa_1\lambda_1 \int_0^x \frac{x\,dx}{\sqrt{R(x)}}, \end{array} \right.$$

(wenn wir in den Ausdrücken für die Moduln (53) jedesmal das obere Zeichen wählen),

oder auch:

$$(66) \quad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = \frac{c_1+l_1}{2} \left\{ \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c^2y^2)}} + \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-l^2y^2)}} \right\}, \\ \displaystyle\int_0^x \frac{x\,dx}{\sqrt{R(x)}} = -\frac{(c_1+l_1)^2}{2(c_1-l_1)} \left\{ \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c^2y^2)}} - \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-l^2y^2)}} \right\}, \end{array} \right.$$

Abb. 1. Aus mathematischen Arbeiten Pringsheims

So also beschreibt Thomas Mann in seinem Roman *Königliche Hoheit* das Formelwerk eines Mathematikers, eigentlich einer Mathematikerin: der Mathematik studierenden Imma Spoelmann, der – so Thomas Mann über seine Romanfigur – *algebraischen* Tochter des Mister Spoelmann. Das kam nicht von ungefähr. Man weiß um die Vorlage für die beiden Romangestalten: die Mathematik studierende Katharina Pringsheim, genannt Katia, und ihr Vater, der ordentliche Professor für Mathematik an der Universität München, der Geheime Hofrat Dr. phil. Alfred Pringsheim.

Aus Liebe zum Vater hatte Katia Pringsheim Mathematik studiert: Differential- und Integralrechnung, Funktionentheorie, nebenher Physik bei Conrad Röntgen, dessen Zorn sie sich zuzog, weil sie einmal ein Experimentiergerät versehentlich zertrümmerte. Begeistert hatte sie das Studium nicht, sie brach es ab, wurde Frau Katia Mann. Ihr scharfer, logischer Verstand wurde gerühmt, sie soll darin ihren Gatten weit übertroffen haben. Versunkene Vergangenheit.

Und das Urbild, Alfred Pringsheim der Mathematiker? Er studiert in Berlin und Heidelberg, promoviert; 1877 habilitiert er sich an der Universität München, wird 8 Jahre später zum außerordentlichen Professor ernannt und schließlich, 1901, zum ordentlichen Professor. München hat er bis 1939 nicht mehr verlassen, 1922 wird er emeritiert.

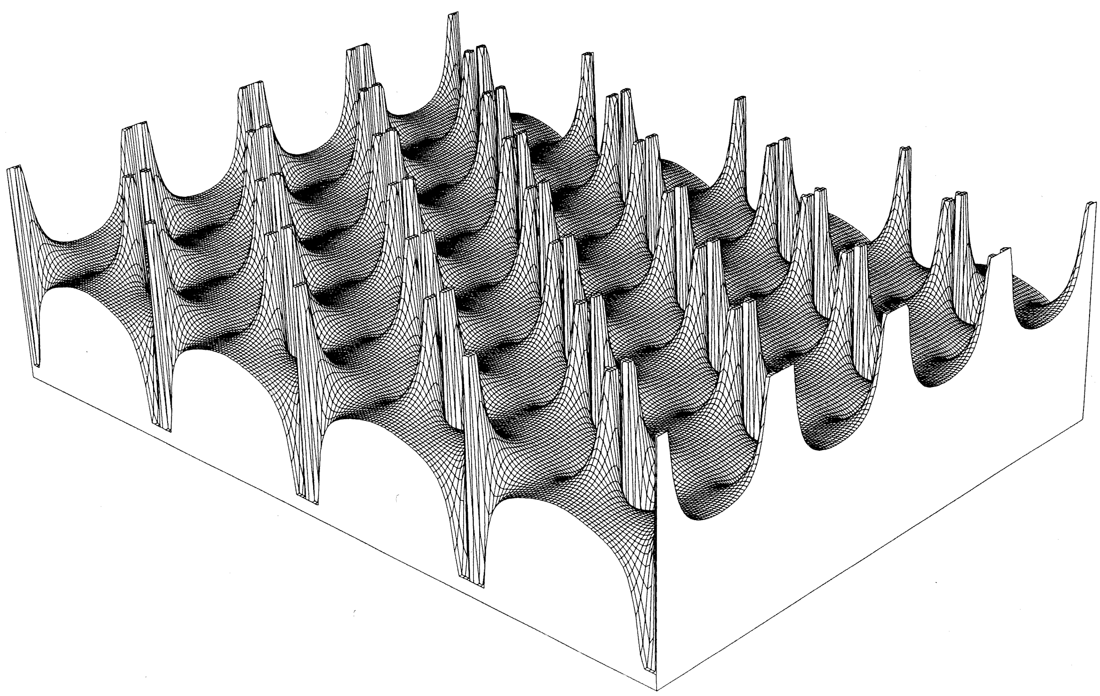

Abb. 2. Die Weierstraßsche elliptische Funktion, ein Arbeitsgebiet Pringsheims

Der Münchner Mathematiker Pringsheim sieht die Mathematik mit den Augen des Mathematikers Weierstraß[1], manche sagen, er sei der wahre Schüler von Weierstraß gewesen. Es wird kein Zufall gewesen sein.

Wir schweifen kurz ab. Er, der große Weierstraß, ... *eine königliche, in jeder Weise imponierende Gestalt* ... (so Kneser), vormals Gymnasiallehrer für Mathematik, Physik, Deutsch, Botanik, Geographie, etc. im ostpreußischen Braunsberg, hatte im 19. Jahrhundert die Mathematik entscheidend geprägt. Die *Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen* ist sein Werk. Geschaffen hatte er sie, um die elliptischen Funktionen, diese großartige Entdekkung der Mathematiker Abel, Gauß und Jacobi, mathematisch völlig durchleuchten und verstehen zu können. – Man mag sich die naive Frage stellen, was kann daran schon Interessantes sein, an einer komplexen Funktion $w = f(z)$, $z = x + iy$? Aber die Folgen waren für die Entwicklung der Mathematik unübersehbar, und es beschäftigt die Mathematiker noch heute. Charles Hermite,

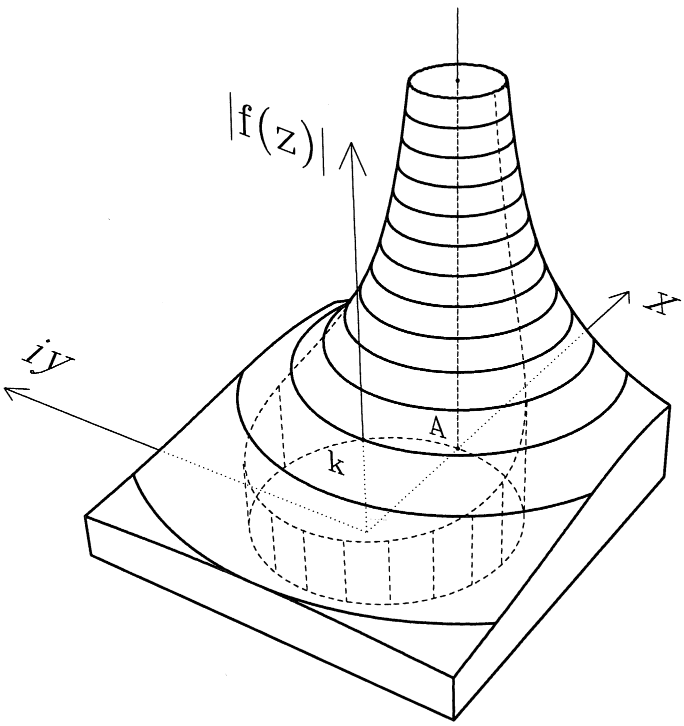

Abb. 3. Illustration eines wichtigen Lehrsatzes von Pringsheim:
Hat eine Potenzreihe $f(z)$ im Konvergenzkreis k nur positive Koeffizienten, dann besitzt $f(z)$ im Punkt A eine Singularität.
A: Schnittpunkt des Konvergenzkreises k mit der positiven x-Achse, $z = x + iy$.

[1] Karl Weierstraß (1815–1897) war seit 1861 korrespondierendes, seit 1863 auswärtiges Mitglied der Bayerischen Akademie der Wissenschaften.

zur Elite der Mathematiker Frankreichs zählend, über Weierstraß: ... *er ist unser aller Meister* (notre maître à tous) ... *unsere Vorlesungen an der Sorbonne oder an der École Polytechnique haben vor allem das Ziel, den Studenten seine Arbeiten und seine großen Entdeckungen nahe zu bringen.* ...

Pringsheim steht in einer großen Tradition. Er setzt die Arbeiten von Weierstraß fort, entdeckt neue und grundlegende mathematische Lehrsätze über analytische Funktionen; sie gehören heute zum klassischen Bestand und werden in den Vorlesungen über Funktionentheorie gelehrt, wie zum Beispiel Pringsheims eindrucksvoller Beweis des Integralsatzes von Cauchy-Goursat. Bei Untersuchungen über die Konvergenz oder Divergenz unendlicher Prozesse entfaltet Pringsheim seine herausragenden mathematischen Fähigkeiten, hier ist er der anerkannte Meister. Besonderes Interesse zeigt er an unendlichen Kettenbrüchen, die man heute benützt, um mathematische Funktionen auf elektronischen

$$x = 100 - \cfrac{1}{100 - \cfrac{1}{100 - \cfrac{1}{100 - \cfrac{1}{100 - \cfrac{1}{100 - \cfrac{1}{100 - \cfrac{1}{100 - \ddots}}}}}}}$$

$$\ddots \; 100 - \cfrac{1}{100 - \cfrac{1}{100 - \cfrac{1}{100 - \ddots}}}$$

Abb. 4. Beispiel eines unendlichen Kettenbruchs: x besitzt den Wert $x = 50 + \sqrt{2499} = 99.9899989\ldots$

Rechenautomaten schnell und effektiv berechnen zu können. Fourierreihen, ein anderer unendlicher Prozeß – in den Anwendungen eine Methode, um Schwingungszustände präzise studieren zu können – fesseln ihn, und er widmet ihnen mehrere Arbeiten.

Pringsheims Arbeiten sind mit Weierstraßischer Strenge abgefaßt. Man schreibt ihm sogar das Verdienst zu, daß erst durch ihn, Pringsheim, die Mathematiker sich nach und nach bequemten, auch ihrerseits diese Strenge in ihren Arbeiten einzuführen.

1894 wird der außerordentliche Professor der Mathematik, Alfred Pringsheim, zum außerordentlichen Mitglied der mathematisch-physikalischen Klasse der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften gewählt. Die Laudatio würdigt seine mathematischen Untersuchungen: ... *Durch eine strengere und sachgemäße Verknüpfung der Theoreme der Lehre von der Convergenz und Divergenz*

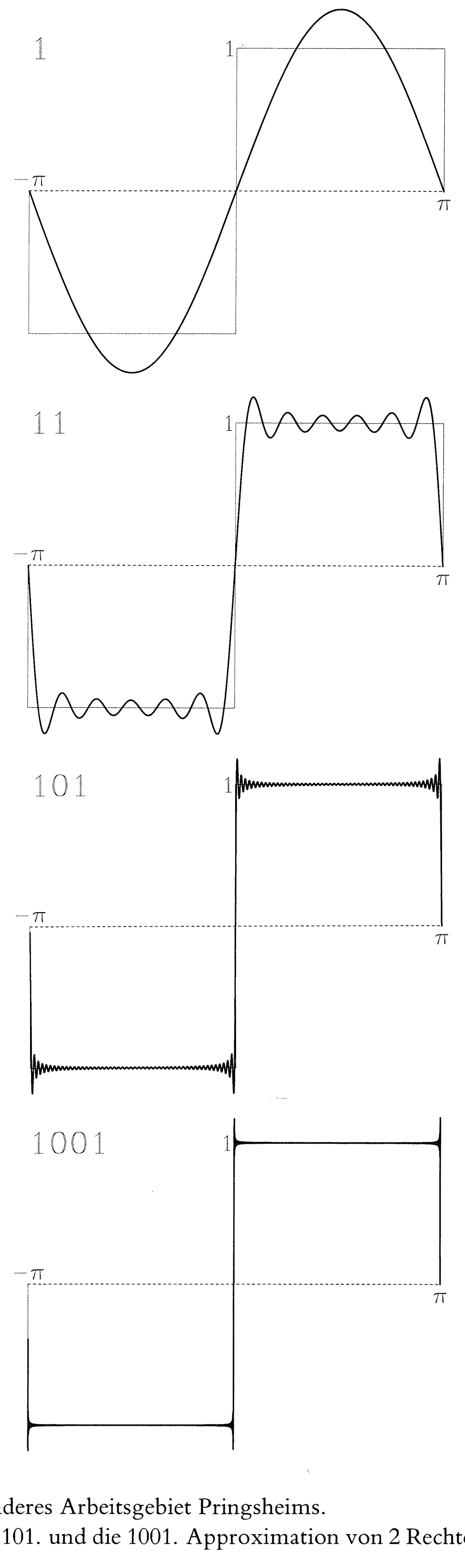

Abb. 5. Fourierreihen, ein anderes Arbeitsgebiet Pringsheims.
Die Bilder zeigen die 1., 11., 101. und die 1001. Approximation von 2 Rechtecken durch Sinusfunktionen.

der Reihen den bis dahin ihr fehlenden Charakter einer mathematischen Theorie zu verleihen. ... Auf Grund der im Vorstehenden bezeichneten Arbeiten Pringsheims, welche eine wesentliche Förderung der mathematischen Wissenschaften darstellen, ... wird die Wahl Pringsheims zum außerordentlichen Mitglied vorgeschlagen, und er wird mit 17 Ja-Stimmen gewählt (1 Gegenstimme). 4 Jahre später, 1898, wird er ordentliches Mitglied, da ... *er in zahlreichen Arbeiten das Gebiet in alle*

Ueber Wert und angeblichen Unwert der Mathematik.

Festrede

gehalten in der

öffentlichen Sitzung der K. B. Akademie der Wissenschaften zu München

zur Feier ihres 145. Stiftungstages

am 14. März 1904

von

Alfred Pringsheim

o. Mitglied der mathematisch-physikalischen Klasse.

München 1904.

Verlag der K. B. Akademie

in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Richtungen durchforscht und dabei eine ganz hervorragende, erfolgreiche wissenschaftliche Tätigkeit bekundet. [Er] *gehört der kritischen Schule an, die sich zur Aufgabe stellt, die Definitionen und Lehrsätze der Mathematik mit möglichster Schärfe auf die Grenzen ihrer Giltigkeit zu prüfen und zu untersuchen, wie sie einwandfrei gefaßt werden können. ...* Und nach der Aufzählung wichtiger Arbeiten Pringsheims: ... *Diese Publikationen Pringsheims haben so sehr die Anerkennung gefunden, daß derselbe jetzt als bester Kenner dieses Gebietes, der Theorie der Reihen gilt. ...* Unterzeichnet hatte die Laudatio auch der berühmte Münchner Mathematiker Ferdinand Lindemann, der als erster die Transzendenz der Zahl $\pi = 3.14159\ldots$ bewiesen hatte, was gleichbedeutend mit dem Nachweis der „Unmöglichkeit der Quadratur des Kreises“ war[2].

Pringsheim hat über 100 Arbeiten veröffentlicht, viele davon sind als Sitzungsberichte der Akademie erschienen. Und er war ein glänzender Lehrer. Seine Vorlesungen über Analysis waren sorgfältig vorbereitet, mit vielen unterhaltenden Bemerkungen versehen, niemand langweilte sich bei ihm. Zu seinem 60. Geburtstag, 1910, widmen ihm einige seiner früheren Hörer eine Festschrift *In dankbarer Erinnerung an Stunden reicher Belehrung und hohen Genusses.* Pringsheims Witz war fast sprichwörtlich, immer treffend, voller kleiner Bosheiten, aber nie verletzend. Pringsheim über seinen Sohn, der beim Physiker Nernst arbeitet: *Peter ist in Berlin und lernt dort den Nernst des Lebens kennen.* 1904 hält Pringsheim in der Bayerischen Akademie der Wissenschaften seine große Festrede *Über Wert und angeblichen Unwert der Mathematik.*

Es endet nicht gut. Als sich die lange Nacht über Deutschland senkt, wird es still um Alfred Pringsheim. 1938 wird er aus der Bayerischen Akademie der Wissenschaften ausgestoßen. Aber Pringsheims Münchner mathematische Kollegen, allen voran Geheimrat Perron, halten ihm die Treue. Sein Haus in der Arcisstraße wurde ihm zwar schon 1933 genommen und abgerissen, und er muß auch mehrere Male umziehen, darf aber Deutschland 1939 noch verlassen. – Und die anderen? Einer der Herausgeber der Pringsheim-Festschrift, der Münchner Mathematiker Fritz Hartogs, erträgt die Kette der fortwährenden Demütigungen nicht mehr und begeht Selbstmord. Otto Blumenthal aus Aa-

---

[2] Die Unmöglichkeit der Quadratur des Kreises ist eine beliebte, doch hohle Phrase des politischen Alltags, denn sie ist in der dort gebrauchten Form völliger Nonsens. Die mathematische Aussage über diese rein akademische Aufgabe ist nämlich die: „Es ist unmöglich nur mit Zirkel und Lineal einen Kreis *in Strenge* in ein flächengleiches Quadrat zu verwandeln (umzuzeichnen)“. Die Betonung liegt hier auf der selbstgewählten Beschränkung „nur Zirkel und Lineal“ und auf „in Strenge“. Läßt man andere Hilfsmittel zu, es genügt zum Beispiel ein Stück einer bestimmten, schon gezeichneten Kurve, kann man die Aufgabe „in Strenge“ lösen und den Kreis exakt in ein flächengleiches Quadrat umzeichnen. Läßt man das „in Strenge“ weg, kommt man allein mit Zirkel und Lineal aus, es bleibt aber ein kleiner Restfehler, der aber, selbst wenn der Kreis den Durchmesser der Erde hätte, auch nur wenige Quadratmillimeter beträgt und praktisch völlig bedeutungslos ist.

chen – er hat Pringsheim eine Arbeit über *Kanalflächen und Enveloppenflächen* gewidmet – wird im Konzentrationslager Theresienstadt ermordet; der berühmte Bonner Mathematiker Felix Hausdorff begeht vor dem Abtransport nach Auschwitz Selbstmord. So ginge es jetzt noch lange weiter. Schicksale Einzelner, Tropfen im Meer der Tragödie, die Deutschland geistig ruiniert hat.

Alfred Pringsheim stirbt 1941 in Zürich. Seine sterblichen Überreste werden verbrannt[3].

---

[3] Zu den Lebensstationen Alfred Pringsheims vgl. den Nachruf von Oskar Perron: Alfred Pringsheim, in: Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 56 (1953) S. 1–6. Vgl. auch oben S. 3 Anm. 3.