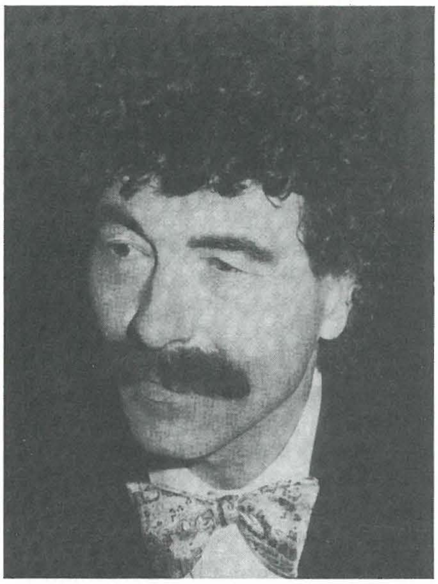
Alexander
von Humboldt
Stiftung | Mitteilungen

Sonderdruck
aus Heft 60

Roland Bulirsch

Mathematik und Informatik – Vom Nutzen der Formeln

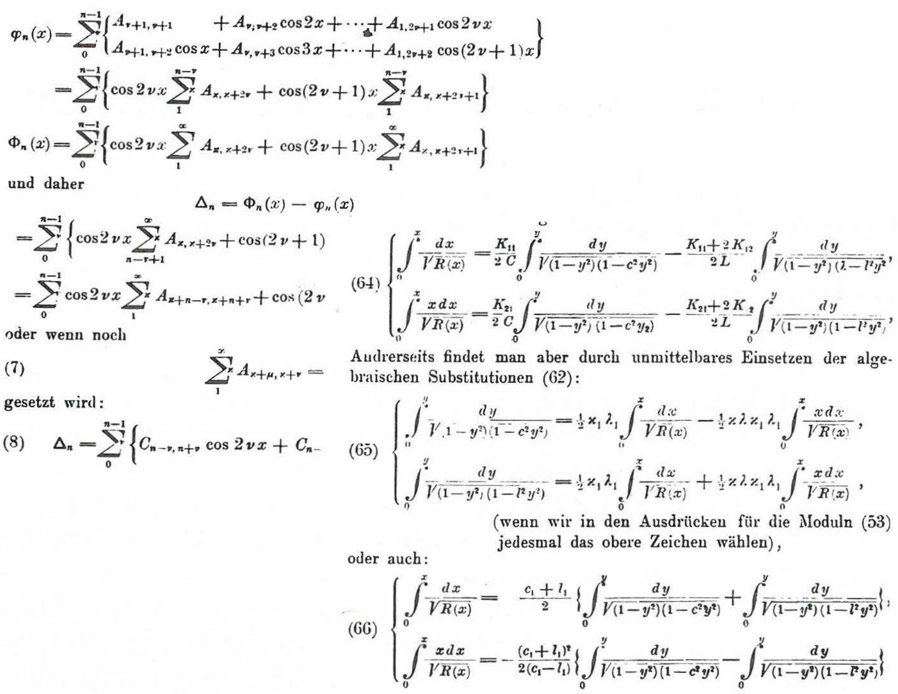


Der Autor ist der Humboldt-Stiftung durch seine Tätigkeit im Zentralen Auswahlausschuß eng verbunden. Der nachstehende Beitrag war Thema eines Vortrags in der Bayerischen Akademie der Wissenschaften und wurde 1991 vom Springer-Verlag veröffentlicht.

Roland Bulirsch, Jahrgang 1932, Dr. rer. nat., seit 1973 ordentlicher Professor für Höhere und Numerische Mathematik an der Technischen Universität München, promovierte (1961) und habilitierte sich (1966) in München. Er arbeitete 1967-1969 an der University of California in San Diego/USA – wohin er später als Visiting Professor immer wieder zurückkehrte – und war bis 1973 als ordentlicher Professor der Universität zu Köln tätig. Er wirkte 1980-1988 als Fachgutachter und Vorsitzender des Fachgutachter-Ausschusses Mathematik der Deutschen Forschungsgemeinschaft, Bonn, ist seit 1985 Mitglied des wissenschaftlichen Beirats des Mathematischen Forschungsinstituts Oberwolfach, seit 1987 Projektleiter im Schwerpunktprogramm „Anwendungsbezogene Optimierung und Steuerung" und seit 1989 Projektleiter im Sonderforschungsbereich 255 „Transatmosphärische Flugsysteme – Grundlagen der Aerothermodynamik, Antriebe und Flugmechanik" der DFG.

Er ist Herausgeber der Zeitschrift „Numerische Mathematik" und Mitherausgeber des „Journal of Optimization Theory and Applications". Er hat zahlreiche Facharbeiten und Fachbücher (mit Übersetzungen in Englisch, Italienisch, Polnisch und Chinesisch) vorzuweisen.

Was er sah, war sinnverwirrend. Ein phantastischer Hokuspokus, ein Hexensabbat verschränkter Runen bedeckte die Seiten. Griechische Schriftzeichen waren mit lateinischen und mit Ziffern in verschiedener Höhe verkoppelt, mit Kreuzen und Strichen durchsetzt, ober- und unterhalb waagrechter Linien bruchartig aufgereiht, durch andere Linien zeltartig überdacht, durch Doppelstrichelchen gleichgewertet, durch runde Klammern zu großen Formelmassen vereinigt. Einzelne Buchstaben, wie Schildwachen vorgeschoben, waren rechts oberhalb der umklammerten Gruppen ausgesetzt. Kabbalistische Male, vollständig unverständlich dem Laiensinn, umfaßten mit ihren Armen Buchstaben und Zahlen, während Zahlenbrüche ihnen voranstanden und Zahlen und Buchstaben ihnen zu Häupten und zu Füßen schwebten. Sonderbare Silben, Abkürzungen geheimnisvoller Worte waren überall eingestreut, und zwischen den nekromantischen Kolonnen standen geschriebene Sätze und Bemerkungen in täglicher Sprache, deren Sinn gleichwohl so hoch über allen menschlichen Dingen war, daß man sie lesen konnte, ohne mehr davon zu verstehen, als von einem Zaubergemurmel.



$$\varphi_n(x)=\sum_0^{n-1}{}_\nu\begin{Bmatrix}A_{\nu+1,\nu+1} + A_{\nu,\nu+2}\cos 2x+\cdots+A_{1,2\nu+1}\cos 2\nu x\\ A_{\nu+1,\nu+2}\cos x+A_{\nu,\nu+3}\cos 3x+\cdots+A_{1,2\nu+2}\cos(2\nu+1)x\end{Bmatrix}$$

$$=\sum_0^{n-1}{}_\nu\left\{\cos 2\nu x\sum_1^{n-\nu}{}_\varkappa A_{\varkappa,\varkappa+2\nu}+\cos(2\nu+1)x\sum_1^{n-\nu}{}_\varkappa A_{\varkappa,\varkappa+2\nu+1}\right\}$$

$$\Phi_n(x)=\sum_0^{n-1}{}_\nu\left\{\cos 2\nu x\sum_1^{\infty}A_{\varkappa,\varkappa+2\nu}+\cos(2\nu+1)x\sum_1^{\infty}{}_\varkappa A_{\varkappa,\varkappa+2\nu+1}\right\}$$

und daher

$$\Delta_n=\Phi_n(x)-\varphi_n(x)$$

$$=\sum_0^{n-1}{}_\nu\left\{\cos 2\nu x\sum_{n-\nu+1}^{\infty}{}_\varkappa A_{\varkappa,\varkappa+2\nu}+\cos(2\nu+1)\right.$$

$$=\sum_0^{n-1}{}_\nu\cos 2\nu x\sum_1^{\infty}{}_\varkappa A_{\varkappa+n-\nu,\varkappa+n+\nu}+\cos(2\nu$$

oder wenn noch

(7) $$\sum_1^{\infty}{}_\varkappa A_{\varkappa+\mu,\varkappa+\nu}=$$

gesetzt wird:

(8) $$\Delta_n=\sum_0^{n-1}{}_\nu\left\{C_{n-\nu,n+\nu}\cos 2\nu x+C_{n-}\right.$$

(64) $$\begin{cases}\displaystyle\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}=\frac{K_{11}}{2C}\int_0^y\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c^2y^2)}}-\frac{K_{11}+2K_{12}}{2L}\int_0^y\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(\lambda-l^2y^2)}},\\ \displaystyle\int_0^x\frac{x\,dx}{\sqrt{R(x)}}=\frac{K_{21}}{2C}\int_0^y\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c^2y_2)}}-\frac{K_{21}+2K_{2}}{2L}\int_0^y\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-l^2y^2)}},\end{cases}$$

Andrerseits findet man aber durch unmittelbares Einsetzen der algebraischen Substitutionen (62):

(65) $$\begin{cases}\displaystyle\int_0^y\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c^2y^2)}}=\tfrac12\varkappa_1\lambda_1\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}-\tfrac12\varkappa\lambda\varkappa_1\lambda_1\int_0^x\frac{x\,dx}{\sqrt{R(x)}},\\ \displaystyle\int_0^y\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-l^2y^2)}}=\tfrac12\varkappa_1\lambda_1\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}+\tfrac12\varkappa\lambda\varkappa_1\lambda_1\int_0^x\frac{x\,dx}{\sqrt{R(x)}},\end{cases}$$

(wenn wir in den Ausdrücken für die Moduln (53) jedesmal das obere Zeichen wählen),

oder auch:

(66) $$\begin{cases}\displaystyle\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}=\frac{c_1+l_1}{2}\left\{\int_0^y\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c^2y^2)}}+\int_0^y\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-l^2y^2)}}\right\};\\ \displaystyle\int_0^x\frac{x\,dx}{\sqrt{R(x)}}=-\frac{(c_1+l_1)^2}{2(c_1-l_1)}\left\{\int_0^y\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c^2y^2)}}-\int_0^y\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-l^2y^2)}}\right\}\end{cases}$$

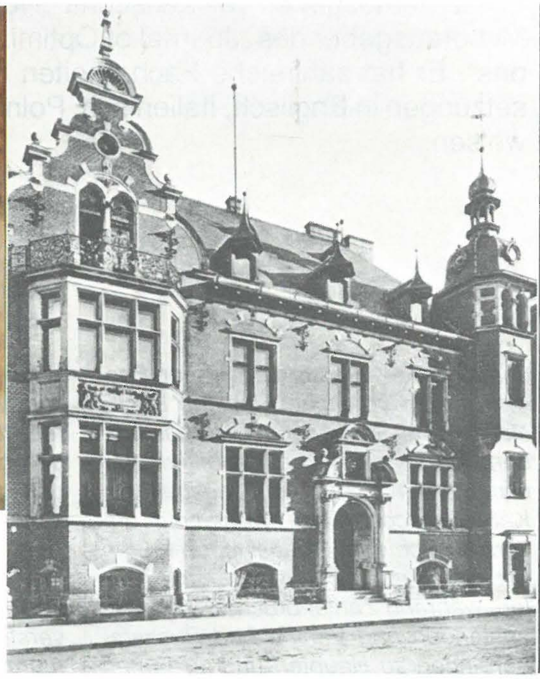
Aus mathematischen Arbeiten Pringsheims

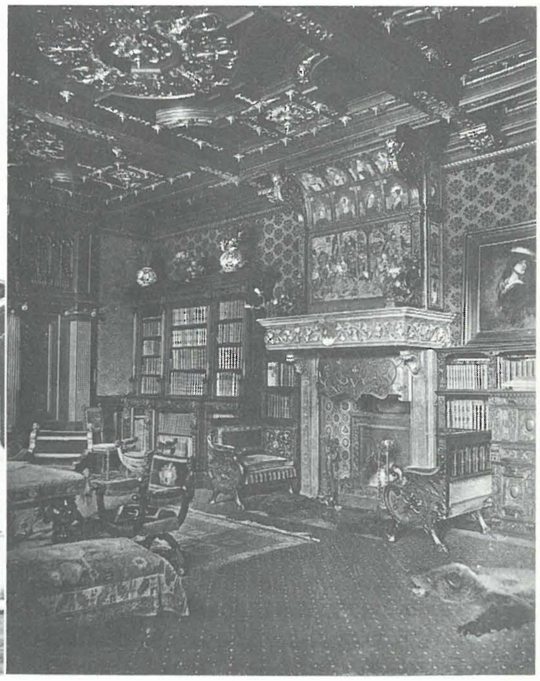
So also beschreibt Thomas Mann in seinem Roman *Königliche Hoheit* das Formelwerk eines Mathematikers, eigentlich einer Mathematikerin: der Mathematik studierenden Imma Spoelmann, der – so Thomas Mann über seine Romanfigur – *algebraischen* Tochter des Mister Spoelmann. Das kam nicht von ungefähr. Man weiß um die Vorlage für die beiden Romangestalten: die Mathematik studierende Katharina Pringsheim, genannt Katja, und ihr Vater, der ordentliche Professor für Mathematik an der Universität München, der Geheime Hofrat Dr. Alfred Pringsheim.

Aus Liebe zum Vater hatte Katja Pringsheim Mathematik studiert: Differential- und Integralrechnung, Funktionentheorie, nebenher Physik bei Conrad Röntgen, dessen Zorn sie sich zuzog, weil sie einmal ein Experimentiergerät versehentlich zertrümmerte. Begeistert hatte sie das Studium nicht, sie brach es ab, wurde Frau Katja Mann. Ihr scharfer, logischer Verstand wurde gerühmt, sie soll darin ihren Gatten weit übertroffen haben.

Versunkene Vergangenheit – aber heimatliche Nähe: München, Arcisstraße, gleich beim Königsplatz, einst noble Adresse der Pringsheims.

Hintergründiger, subtiler Spott durchtränkt Thomas Manns unnachahmliche und meisterhafte Schilderung eines Formeln produzierenden Mathematikers, verdichtet sich dem nur literarisch Gebildeten zur Gewißheit der absoluten Sinnlosigkeit und Nutzlosigkeit eines solchen Tuns. Thomas Mann wird gewiß nicht viel von Mathematik gehalten haben, trotz seines





Katja Pringsheim (1899)

Palais Pringsheim, München, Arcisstraße 12 (Mitte)

Salon im Palais Pringsheim (rechts)

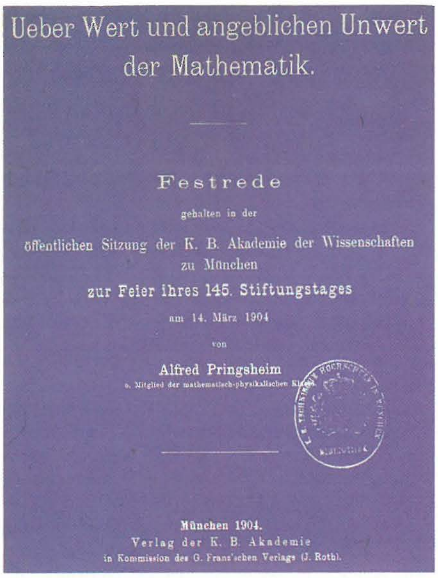
„mathematischen" Schwiegervaters Pringsheim. Theodor Lessing, mit dem er in einen literarischen Streit geriet, hat ihn „mathematikfeindlich" genannt; man wird es nicht so ernst nehmen müssen.

Mit seinem Schwiegervater Pringsheim verband ihn freilich auch nicht viel, seinerzeit hatte der ihn sogar als wenig standesgemäßen Schwiegersohn angesehen, und auch später suchte Thomas Mann die Pringsheim-Villa in der Arcisstraße nur ungern auf. Manchem Schöngeist des Feuilletons hat Thomas Manns angeheiratete Mathematik-Verwandtschaft seelische Schmerzen bereitet, einigen war sie so peinlich, daß sie die Profession Pringsheims als Physik ausgaben. Dabei haben die Pringsheims großen Salon in München geführt; gelegentlich kamen auch Wittelsbacher Prinzen, freilich weniger aus Interesse an der Mathematik des Geheimrats, sondern seiner schönen Frau Hedwig wegen.

Schopenhauers Ideen haben Thomas Mann geprägt. Der Professor Pringsheim aber ist über Schopenhauer in Rage geraten, weil der sich in seinen Schriften gegen Mathematik ausgesprochen und ihren Bildungswert in Zweifel gezogen hatte. Der Geheimrat war darüber so erbittert, daß er 1904, bei der Feier zum 145. Stiftungstag der Königlichen Bayerischen Akademie der Wissenschaften, in einer Festrede *Über Wert und angeblichen Unwert der Mathematik* diese leidenschaftlich verteidigt hat.

Nur in einem waren Thomas Mann und Alfred Pringsheim eines Urteils, in ihrer grenzenlosen Verehrung Richard Wagners. Pringsheim hat sogar Wagner-Opern in Klavier gesetzt und in Bayreuth für Wagner einmal tätlich Partei ergriffen: Als in einer Gaststätte am Nebentisch abfällig über Wagner gesprochen wurde, schlug der leicht aufbrausende Geheimrat mit einem Bierkrug auf den Lästerer ein; das hat dem Mathematikprofessor den Spottnamen „Schoppenhauer" eingetragen.

Es sollte in der Familie Mann nicht die einzige Begegnung mit der Mathema-



Ueber Wert und angeblichen Unwert der Mathematik.

Festrede

gehalten in der

öffentlichen Sitzung der K. B. Akademie der Wissenschaften zu München

zur Feier ihres 145. Stiftungstages

am 14. März 1904

von

Alfred Pringsheim

o. Mitglied der mathematisch-physikalischen Klasse.

München 1904.

Verlag der K. B. Akademie

in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Pringsheims Festrede

tik sein. Sohn Angelus Mann, Golo gerufen, auch er ein Meister des Wortes, erzählt in seiner Selbstbiographie *Erinnerungen und Gedanken* von einem Mathematik-Studenten, mit dem er in Hamburg im gleichen Hause wohnte. Als dieser Student auf tragische Weise aus dem Leben schied, suchte Golo Mann den Lehrer dieses Studenten, den großen Algebraiker Artin auf, und Stück um Stück enthüllt sich die ganze Tragödie um die Verzweiflungstat des jungen Mathematikers.

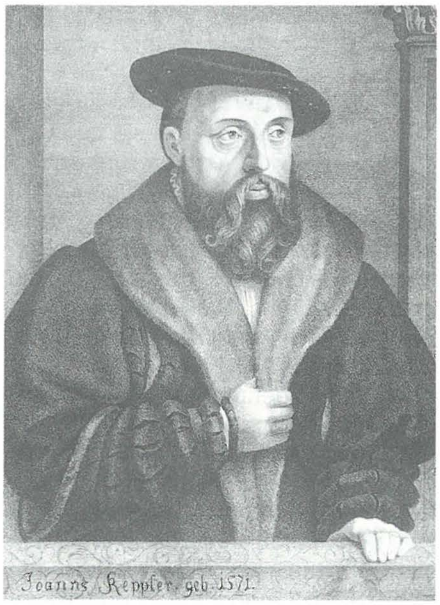
In seinem großartigen Wallenstein-Buch fährt Golo Mann auch den Spuren des Johannes Kepler nach. Golo Mann über Kepler: *Neben den Anderen, weit über den Anderen, Meister Johannes Kepler...*, und er zeichnet mit Einfühlungsvermögen und Sprachkraft den ruhelos umhergetriebenen, zuletzt mit 1000 Gulden Rheinisch im Jahr entlohnten, Fürstlich Friedländischen Mathematicus, von Wallenstein ausersehen – Wallensteins ehrenvolle Anrede Keplers: *Lieber Herr und Freund* – erster Professor der neuen Elite-Universität des Herzogtums Friedland im schlesischen Sagan oder dem böhmischen Jičín zu werden. Hatte er doch, er, Albrecht von Gottes Gnaden Herzog zu Friedland und Sagan, der Römisch Kaiserlichen Majestät General Obrist Feldhauptmann, wie auch des Oceanischen und Baltischen Meeres General, hatte der doch schon 1628 aus Prag seinem Saganer Landeshauptmann von Nechern befohlen:

Wir fügen Euch hiermit zu wissen, daß Ihrer Kaiserlichen Majestät Mathematicus, der ehrenwerteste und hochgelehrte Johann Kepler in unserer Stadt Sagan zu wohnen begehret, welches Wir ihm auch, weil er ein hocherfahrener Mann in der Mathematica und Astronomia ist, bewilliget haben... derowegen an Euch Unser Befehl, daß Ihr ihm... in allen die hülfreiche Hand bieten und denselben Euch wohl recommendirt sein lassen sollet.

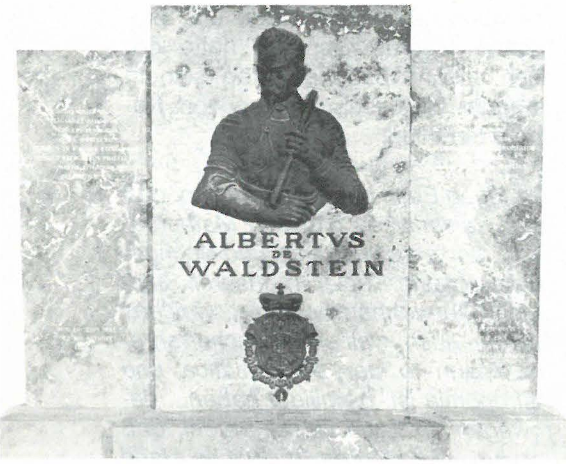
Es kam dann alles aber ganz anders.

Noch einmal Thomas Mann und Alfred Pringsheim: Der Dichter und der Mathematiker erscheinen wie Inkarnationen der viel beschworenen zwei Kulturen, der geistigen, der literarischen, im deutschen Sprachraum die „eigentliche" Kultur genannt und der naturwissenschaftlich-mathematischen, hierzulande etwas abfällig als „Zivilisationserrungenschaften" bezeichnet.

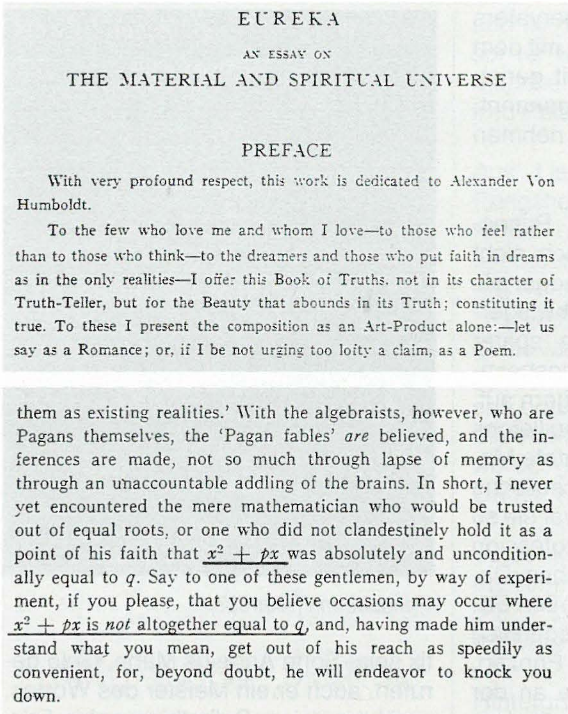
So nämlich sah Sir Charles Snow – in einer Rede vor gut dreißig Jahren – die



Johannes Kepler (1571–1630)



Wallensteins Grab in Münchengrätz, Böhmen



EUREKA

AN ESSAY ON

THE MATERIAL AND SPIRITUAL UNIVERSE

PREFACE

With very profound respect, this work is dedicated to Alexander Von Humboldt.

To the few who love me and whom I love—to those who feel rather than to those who think—to the dreamers and those who put faith in dreams as in the only realities—I offer this Book of Truths, not in its character of Truth-Teller, but for the Beauty that abounds in its Truth; constituting it true. To these I present the composition as an Art-Product alone:—let us say as a Romance; or, if I be not urging too lofty a claim, as a Poem.

them as existing realities.' With the algebraists, however, who are Pagans themselves, the 'Pagan fables' *are* believed, and the inferences are made, not so much through lapse of memory as through an unaccountable addling of the brains. In short, I never yet encountered the mere mathematician who would be trusted out of equal roots, or one who did not clandestinely hold it as a point of his faith that $x^2 + px$ was absolutely and unconditionally equal to q. Say to one of these gentlemen, by way of experiment, if you please, that you believe occasions may occur where $x^2 + px$ is *not* altogether equal to q, and, having made him understand what you mean, get out of his reach as speedily as convenient, for, beyond doubt, he will endeavor to knock you down.

Edgar Allan Poe:
Eureka und
The purloined letter

Novalis

geistige Welt geteilt, Grenzen gezogen: Literatur, Kunst gegen Physik, Mathematik, Informatik inbegriffen, Naturwissenschaften. Humanity versus Science. Und die Vertreter der einen Seite halten dabei nicht viel von (denen) der anderen Seite. Seither schreibt man auch bei uns im Feuilleton darüber. Freilich überhörte und überlas man wieder einmal die in angelsächsischen Bekenntnissen und Aufsätzen nicht selten versteckte Selbstironie und das „Sich-selbst-nicht-ganz-so-ernst-nehmen".

Ist es wirklich so schlimm um die Gegnerschaft Mathematik, Informatik, also der beiden mathematischen Wissenschaften – rechnen wir noch die Physik hinzu – auf der einen und Literatur, Kunst auf der anderen Seite bestellt? Edgar Allan Poe, der bei uns unterschätzte amerikanische Dichter, argumentiert in seiner Kriminalerzählung *Der entwendete Brief* mit einer quadratischen Gleichung $x^2 + px - q = 0$. Und in seiner langen, Alexander von Humboldt verehrungsvoll gewidmeten Abhandlung *Eureka* nimmt er manche, erst später gefundene physikalisch-mathematische Tatsache vorweg, so etwa über das Olberssche Paradoxon des dunklen Nachthimmels. Denkfehler, die im 19. Jahrhundert dem Dichter Poe unterlaufen – verzeihliche Fehler, wie man meinen sollte – haben ihm den Spott mancher Naturwissenschaftler des 20. Jahrhunderts eingetragen. Wie wird das 21. Jahrhundert erst über das Zwanzigste spotten?

Da ist noch einer, der Freiherr von Hardenberg, genannt Novalis. Seine enthusiastische Verteidigung der Mathematik und der Mathematiker haben ihm freilich viel Häme der letzteren eingetragen. Falls das gegen jemanden sprechen sollte, dann wahrscheinlich nicht gegen Novalis. Novalis: *Der Begriff der Mathematik ist der Begriff der Wissenschaft überhaupt. Alle Wissenschaften sollten daher Mathematik werden.* So schreibt er, und manches andere, in seinen mathematischen Fragmenten. Nun meinte der Mathematiker Konrad Knopp, das sei alles romantische Schwärmerei, und er glaubt auch zu wissen, daß die Sachkenntnis des Novalis nicht groß war. Ich teile diese Meinung nicht: Novalis hat nach dem Tode seiner Braut Sophie von Kühn das Studium der Physik und des Bergbaus im sächsischen Freiberg wieder aufgenommen, wo wenig zuvor, begeistert von dem berühmten Professor Werner, Alexander von Humboldt studiert hatte. Dieser Werner, er muß ein begnadeter Lehrer gewesen sein, hat auch in Novalis die Liebe zu diesen Wissenschaften entfacht. Ludwig Tieck über Novalis: *Seine Kenntnisse in der Mathematik sowie in den Künsten der Mechanik, vorzüglich aber in der Bergwerkskunde, waren ausgezeichnet.* Da Tieck sonst sehr nüchtern und kühl urteilt, habe ich keinen Grund, am Wahrheitsgehalt der Worte über Novalis zu zweifeln. Wieder Novalis: *Raum und Zeit entstehen zugleich – Synthese der beiden. Jeder Körper hat seine Zeit.* Diese Sätze, heute selbstverständlich, müssen im ausgehenden 18. Jahrhundert, in dem sie niedergeschrieben wurden, rätselhaft geklungen haben. Vielleicht gibt es Auserwählte, denen Seherkraft verliehen wurde.

Aber man braucht Übersinnliches nicht zu bemühen. Schon 50 Jahre vor Novalis, 1754, meinte der große französische Mathematiker und Enzyklopädist d'Alembert: *...daß man die Dauer als vierte Dimension betrachten könne und daß die Multiplikation eines Volumens mit der Zeit ein Produkt ergäbe, das vier Dimensionen hat.*

Sind Kunst und Mathematik Gegensätze? Leonardo da Vinci:

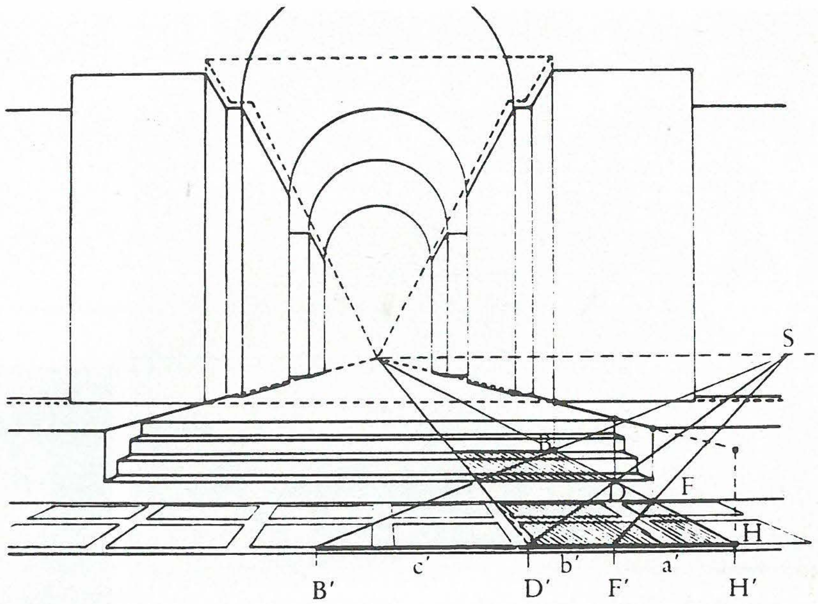
Ihr Studierenden, baut nicht ohne Fundamente, studiert die mathematischen Wissenschaften, keine Gewißheit gibt es, wo man nicht eine der mathematischen Wissenschaften anwenden kann.

Mediterrane Schau der Dinge, abhold aller Irrationalismen. Und wahr: Die Kunst der Renaissance, in Form und Farbe geronnene, Stein gewordene Mathematik. Raffaels „Schule von Athen", ein Hymnus an die Mathematik, die Geometrie. Er selbst porträtiert sich als Geometer – seine Schriften und Briefe stecken voller mathematischer Formeln und Berechnungen – und stellt sich im Bild zur Gruppe der Mathematiker und Astronomen um Euklid, Ptolemäus und Zarathustra.

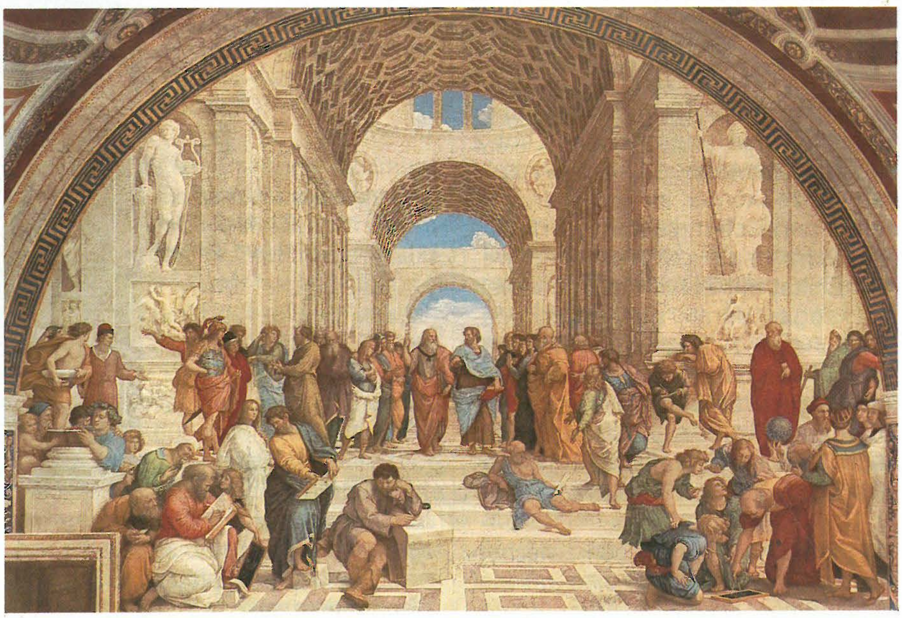
Gibt es auch meßbare Kriterien für große Kunst? Van Goghs bewundertes Bild *Weg mit Zypresse und Stern* – er hat es im Mai 1890 in St. Remy, Provence, gemalt – haben Kunstexperten als Phantasieprodukt abgetan. Aber kürzlich fand man – unter anderem mit Hilfe der Mathematik – heraus, daß im April 1890, drei Wochen vor Entstehung des Bildes, eine in unseren Breiten recht seltene Planetenkonstellation zu sehen war, und genau diese sieht man auf van Goghs Gemälde, aus Gründen der Bildkomposition seitenverkehrt dargestellt.

Über Mathematik und Musik hat man viel geredet, und man glaubte sogar, daß die einen besonders begabt für das andere sein müßten. *Er war, wie ich und alle eigentlichen Musici, kein Liebhaber von trockenem mathematischem Zeuge*, erzählte Carl Philip Emanuel Bach von seinem Vater. Man wird es nicht wörtlich nehmen müssen, Bruchrechnen war ohnehin alles, was an den damaligen Lateinschulen gelehrt wurde. Zahlenspiele und Zahlenmystik in Bachs Werken hat manche Leute beschäftigt; andere wieder, die glaubten, Bachs Musik werde durch die Verbindung mit der Mathematik entweiht, sind darüber in Zorn geraten.

Freilich ist in der Musik auch Mathematik verborgen. Sie verbirgt sich in den gebrochenen, komplizierten



Zur Geometrie der Schule von Athen

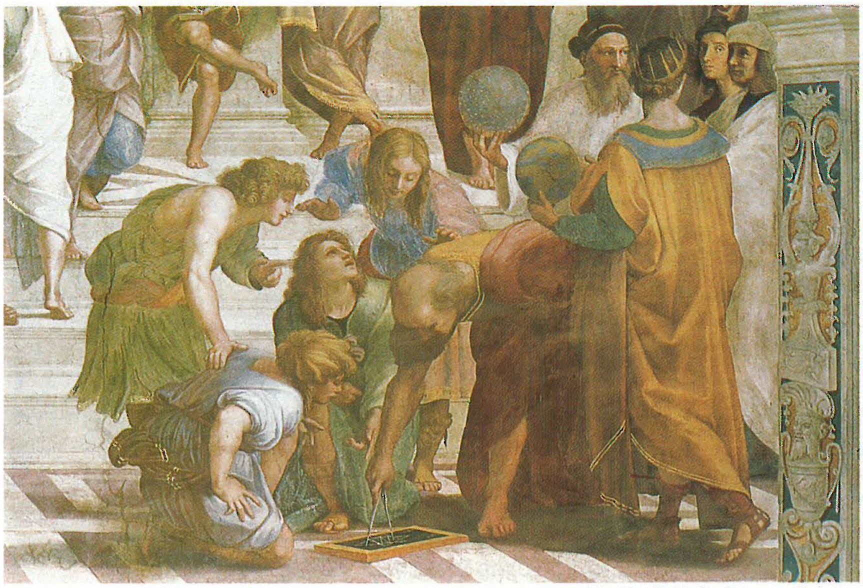


Raffael: Schule von Athen

Rhythmen der bulgarischen Tänze, die in den Taktfolgen 5/16, 9/16 oder gar 7/16 + 11/16 geschrieben sind, erst recht in den Schrittfolgen der „Sardana", dem 2/4-taktigen Volkstanz der Katalanen, die ihn nach Restklassengesetzen der Zahlentheorie tanzen. Die Katalanen würden sich bei dieser Erklärung wundern.

Noch einen stellen wir ins Licht, aber der braucht es nicht, er selbst ist Licht.

Als er Rechnen lernte [setzte er so gar die Musik auf die Seite], war Tisch, Sessel, Wände, ja sogar der Fußboden voll Ziffer mit der Kreide, überschrieben... berichtete man von ihm. Seiner Schwester schrieb er aus Rom, 1770 auf seiner italienischen Reise, nach Salzburg: *Ich bitte Dich, Du wirst die Künste von der Rechenkunst finden, ...ich habe sie verloren.... Also bitte ich dich, sie mir zu copiren, nebst anderen Rechenexempeln, und mir sie*



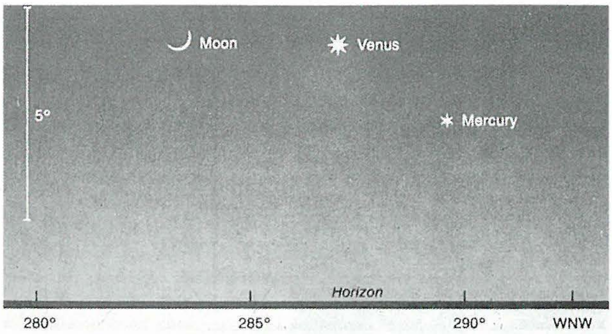
Raffael: Schule von Athen; er selbst rechts im Bild

her zu schicken. Später bedankte er sich aus Neapel: ...io vi ringrazio, di avermi mandato questi Rechenhistorien....

Auf einem seiner Notenblätter hat er versucht, alle Potenzen der Zahl 2 bis 2^{64} zu berechnen, um die Anzahl der Weizenkörner zu ermitteln, die dem persisch-indischen Erfinder des Schachspiels versprochen waren. Er hat mit Zahlen gern gespielt und sogar daran gearbeitet, Menuette aus zweitaktigen Melodiebruchstücken formal nach bestimmten Regeln zu konstruieren. Ihm, Wolfgang Amadeus Mozart, war auch Talent und Neigung zur Algebra gegeben.

Die eigentlichen Bindungen zwischen Mathematik und Musik sind rational nicht faßbar. Novalis meinte, Mathematik offenbare sich in der Musik. Vielleicht hat er recht.

Aber leicht hatte es die Mathematik nie im deutschen Sprachraum, und ihre Vertreter haben hier auch nie besonderes Ansehen genossen; das gäbe jetzt ermüdende Lektüre. Und was ein Präsident Frankreichs über Mathematik sprach, nämlich: *Unsere mathematische Ausbildung ist berühmt, und die Mathematik nimmt auch bei den anderen Disziplinen eine Schlüsselstellung ein.... Wie ist unsere Stellung innerhalb der weltweiten Forschung zu kräftigen, wie sichert man sich einen neuen Zuwachs an Forschern, an Ingenieurmathematikern...* käme einem deutschen Staatsmann nie in den Sinn.



Planetenkonstellation am 20. April 1890 (oben rechts)

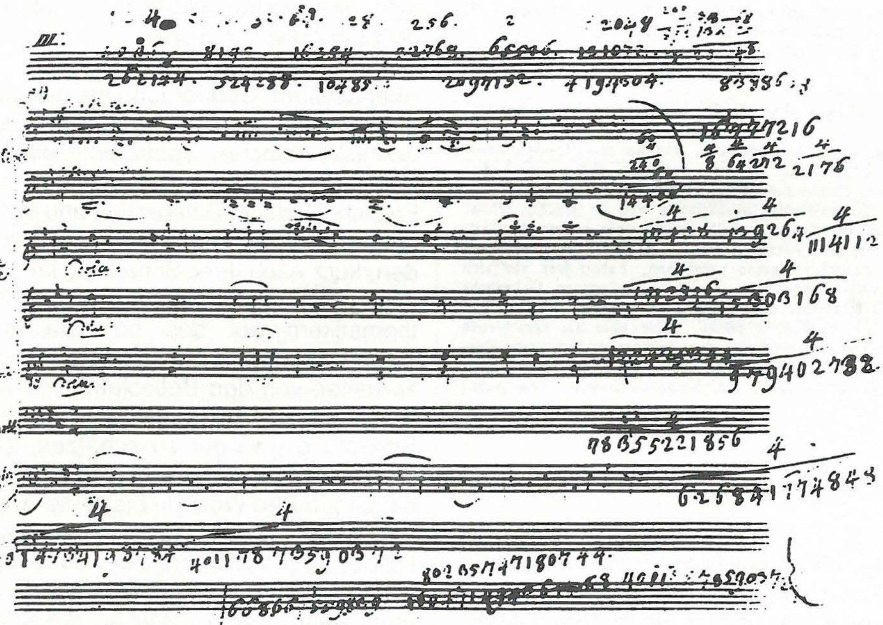
Van Gogh: Weg mit Zypresse und Stern (unten)

Aber das Abbild von Carl Friedrich Gauß auf der neuen deutschen Zehnmark-Banknote gibt Hoffnung, söhnt uns Mathematiker mit manchem aus. Was ist Mathematik? Neben der Medizin ist sie die älteste Wissenschaft;

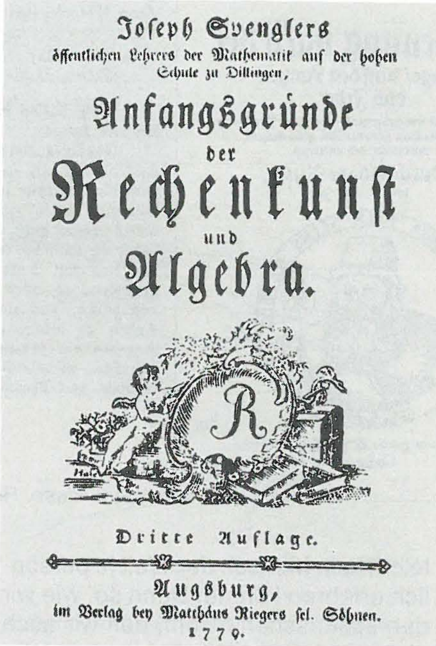
Lateinische Rationalität Frankreichs. Hätten wir nur ein wenig davon; manches geschichtliche Unglück wäre uns erspart geblieben.

Da ist er wieder, der klassische Gegensatz Deutschland – Frankreich, zur Abwechslung auf der Ebene der Mathematik präsentiert.

Deutsche Zehnmark-Banknote



Wolfgang Amadeus Mozart: Potenzen der Zahl 2, korrekt bis $2^{24} = 16777216$, dann Rechenfehler; für die größte auf dem Notenblatt stehende Zahl gilt $160471494361488 \approx 2^{47} = 140737488355328$



Joseph Spenglers
öffentlichen Lehrers der Mathematik auf der hohen Schule zu Dillingen,
Anfangsgründe der Rechenkunst und Algebra.
Dritte Auflage.
Augsburg,
im Verlag bey Matthäus Riegers sel. Söhnen.
1779.

Algebra-Buch aus Mozarts Nachlaß; enthält neben anderen die Auflösung von quadratischen Gleichungen und von linearen Gleichungen mit mehreren Unbekannten nach dem Prinzip des Gauß-Algorithmus, ferner arithmetische und geometrische Progressionen.

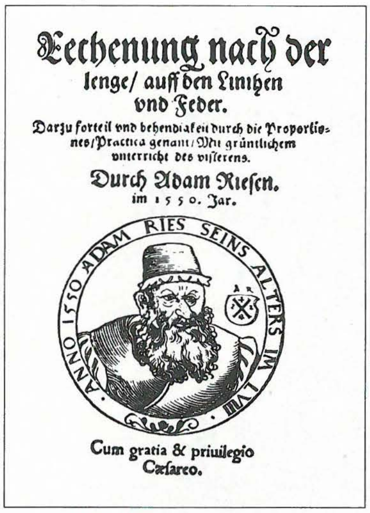
ihre Spuren verlieren sich im Nebel der Vorzeit, und die Archäologen haben aus aufgefundenen Tontafeln entziffert, daß schon vor 4500 Jahren im vorderen Orient, im syrischen Elbla, Symposien über Mathematik stattgefunden haben: Man konnte bereits zwei algebraische Gleichungen mit zwei Unbekannten auflösen. In ihren dunklen Anfängen (oder waren sie hell?) half sie, als Astronomie und Astrologie verkleidet, den Willen der Götter oder was man dafür hielt, aus dem Laufe der Gestirne zu ergründen. Das galt freilich nur für das Schicksal des Herrschers und seines ganzen Volkes; eben weil die Herrscher ihre Abstammung auf die Götter selbst zurückführten. Individuelle, „maßgeschneiderte" Horoskope nach dem Muster des 20. Jahrhunderts, solche absurden Ideen wären niemandem eingefallen.

Mathematiker und Priester, damals synonyme Begriffe, wobei Mathematik zugleich Astronomie, Astrologie und Mechanik war und das, was heute Mathematik heißt, Geometrie genannt wurde; die Grenzen waren verwischt.

In den Kulturen um den Mittelmeerraum nahm die Mathematik einen hohen Rang ein. Bei den Römern war sie zwar nur nützliche Gebrauchswissenschaft, später wieder hochgeschätzt in den maurischen Hochkulturen des 10., 12. und 13. Jahrhunderts.

Die Erkenntnisse der Mathematik sind in Jahrtausenden mühsamer Gedankenarbeit herangereift, ihre Formelsprache über viele Jahrhunderte gewachsen. In ihr konzentriert sich in hochabstrakter Form unser gesamtes Wissen und unsere Erfahrung über die Ordnung der uns umgebenden Welt.

Diese Sicht über die Ordnung der Dinge unserer Welt ist genetisch fixiert, und sie ist richtig. Sie muß objektiv richtig sein, muß die „richtige" Struktur unserer Welt widerspiegeln, weil wir, d.h. unsere genetischen Vorgänger, sonst überhaupt keine Überlebenschancen gehabt hätten. Um überleben zu können, müssen höhere Lebewesen ständig (unbewußt) wissen, wie der Raum um sie herum beschaffen ist: wo oben, wo unten, wo links, wo rechts ist. Entfernungen müssen geschätzt werden, ein Gefühl für den Ablauf der Dinge, die Zeit, muß sich einstellen. All das ist lebenswichtig, denn unaufhörlich drohen Gefahren, jeder Irrtum ist tödlich! In der Mathematik finden wir diese zum Abstraktum verdichteten Erfahrungen wieder. Aber man kann diese abstrakten Erfahrungen, die uns die Mathematik vermittelt, nicht sehen, kaum begreiflich machen, denn in der Mathematik sieht man ja von der gegenständlichen Natur der Dinge, die wir mit unseren Sinnen wahrnehmen, ab, und betrachten nur die Ordnung, in die diese Dinge hineingestellt sind. Das ist die scheinbare Schwäche der Mathematik, aber es ist in Wirklichkeit ihre große Stärke, keine andere Wissenschaft kommt ihr darin gleich. Warum? Wir könnten ja versuchen, diese Ordnungsprinzipien, die mathematischen Gesetze, wie man sie nennt, auf Dinge anzuwenden, die unserer unmittelbaren sinnlichen Wahrnehmung entzogen sind und die viel-


Rechenung nach der lenge/ auff den Linihen vnd Feder.
Darzu forteil vnd behendigkeit durch die Proportiones/ Practica genant/ Mit gründlichem vnterricht des visierens.
Durch Adam Riesen.
im 1550. Jar.

Cum gratia & priuilegio Cæsareo.

Adam Riese: Rechenbuch von 1550

Dem Wolgebornen Herrn, Herrn Steffan Georgen, Herrn von Sternbergk, auff Postelbergk, Wodolitz vnd Ratagen:
Röm. Kay. May. Rath, Böhemischer Cammer Praesidenten, vnnd Teutscher Lehen, Haubtman der Cron Böheimb: Meinem Gnädigen Herrn.

Wolgeborner Herr, Gnädiger Herr, E. G. seind mein gantz gehorsame Dienste bevor.

Gnädiger Herr, Man sagt im sprichwort, wer an die Strassen bawe, der sol sich nit an der Leute reden kheren: das hab ich sonderlich diss verschienene Jahr in eigner Person erfahren. Dann weil ich im verschienen Decembri mein neuntes Prognosticum geschrieben vnd in truckh geben: haben meine gute Gönner vnd bekante theils jr fleissiges auffmercken gehabt, ob solliches auch mit dem wetter eintreffe. Aldieweil nun der Himmel sich mit demselben zimlicher massen verglichen, haben jrer viel sich gefunden, so mich zu continuirung dieses bisshero gepflogenen Gebrauchs vermahnet, vnd sich vnderstanden, mich fürohin etwas früer hinder diese Arbeit zu bringen, als ich bisshero gepflegt. Wie aber im verschienen Augusto ein grosser vnderscheid zwischen dem Wetter vnd meinem Prognostico, ja allerdings das widerspil ervolgt, haben erstgemelte meine gute Günner vnd Freunde still geschwiegen, vnd hingegen andere, zwar hohes

Kepler-Brief von 1604

leicht kein Mensch der Welt je persönlich erfahren könnte. Denn so, wie wir den elektrischen Strom, den wir auch nicht sehen, wohl aber an seiner Wirkung erkennen können, etwa wie die nur mit einem dünnen Draht verbundene Lokomotive einen tausende von Tonnen schweren Zug mit hoher Geschwindigkeit zieht, so können wir auch die Wirkungen der Mathematik erkennen, indem wir die in ihr gefundenen Ordnungsprinzipien wieder zurück auf die Gegenstände unserer Erfahrung übertragen. Daß es zu unserer Verblüffung funktioniert, daß es wirklich „geht", ist die überwältigende Erkenntnis, eigentlich ein Wunder; daß es die meisten heute gleichgültig hinnehmen, mag nur betroffen machen über den Grad an Abstumpfung.

Mathematik ist unsichtbare Kultur. Galilei hat als einer der ersten die geistige Macht, die die Mathematik über die Dinge der Natur verleiht, erkannt und bewußt eingesetzt. Für die Physik war und ist die Mathematik völlig unentbehrlich; in einer Art geistigen Symbiose haben die beiden Wissenschaften zusammengelebt, Trennlinien waren hier kaum zu ziehen. Gerade aus der Mechanik zogen die Mathematiker ihre Anregungen, mathematische Resultate flossen zurück, neue physikalische Erkenntnisse offenbarend.

Aber so wichtig die Mathematik auch für die Erkenntnis der Ordnungsgesetze, denen die Dinge in der unbelebten Natur unterworfen waren, auch gewesen ist, so ist doch lange Zeit die Mehrheit der Menschen gut ohne sie ausgekommen, sieht man einmal vom Rechnen des Alltags ab. Dazu Pestalozzi: *Zählen und Rechnen ist der Grund aller Ordnung im Kopf.* Wichtig war sie nur für den kleinen Kreis der Naturforscher, einige Meister der Kunst und die Philosophen der klassischen Zeit, die um geistige Erkenntnis rangen. Und auch die Schöpfung der Differential- und Integralrechnung – die Geburtsstunde der modernen Technik – war zunächst nur für wenige von Bedeutung.

Plötzlich änderte sich alles. Denn es geschah etwas Fundamentales, in seinen Auswirkungen noch immer unübersehbar: Die Schaffung der elektronischen Rechenautomaten! Und die Mathematik gebar wieder eine neue Tochter, die Informatik. So, wie ihr vor Jahrtausenden die Astronomie und vor Jahrhunderten die Physik entsprungen waren. Die automatischen Rechner machten die Mathematik und ihre neue Tochter zu einer fast alle Gebiete der modernen Naturwissenschaft und Technik beherrschenden Grundlagenwissenschaft. Die Rechenautomaten erlaubten es abstrakte mathematische und informatische Beziehungen ganz konkret auf alle möglichen speziellen Situationen und Probleme der uns umgebenden realen Welt anzuwenden, also etwas zu tun, was früher völlig undenkbar gewesen wäre.

Aber seltsam, Genugtuung hat das bei Mathematikern nicht ausgelöst, im Gegenteil! Manche spotteten; einige fürchteten jetzt um die Mathematik. Freilich, auch die Differential- und Integralrechnung ist aus ähnlichen Gründen, kurz nach ihrer Schaffung im 17. Jahrhundert, von nicht wenigen Mathematikern auf das heftigste bekämpft worden. Die Mathematik rein zu halten von den Befleckungen aller Anwendung, also die Dinge der Schöpfung geringer zu schätzen, als die Ideen darüber, eine groteske Fehlhaltung, deren Wurzeln bis in die Antike reichen. Zum Glück haben sich schöpferische Mathematiker um solch verquere Philosophie wenig gekümmert, denn, Kepler: *Wer an die Straßen baut, der soll sich nit an der Leute Reden kehren.*

Nur wenige Mathematiker hatten die Bedeutung der Rechenautomaten begriffen und die Folgen erahnt, und ganz sicher gehörte zu dieser Gruppe weitsichtiger Männer der Münchner Mathematiker Robert Sauer und seine Schüler Klaus Samelson und Friedrich Ludwig Bauer.

In aller Nüchternheit hat unlängst eine Enquête-Kommission der Amerikanischen Akademie der Wissenschaften festgestellt: *Hochtechnologie ist im wesentlichen mathematische Technologie.*

Mathematik und Informatik – das jüngste Kind der Mathematik mit Neigung und Begabung für Technik –, die beiden mathematischen Wissenschaften, sind in Verbindung mit den Rechenautomaten zum Rückgrat der modernen Technik geworden.

Nehmen wir an, es gäbe keine Rechenautomaten mehr und das gesamte mathematische und informatische Wissen würde sich in Nichts auflösen! Als erstes fielen alle Flugzeuge vom Himmel; gleich darauf versiegte das Öl, kein Benzin, kein Autofahren mehr; denn was viele nicht wissen: auch die

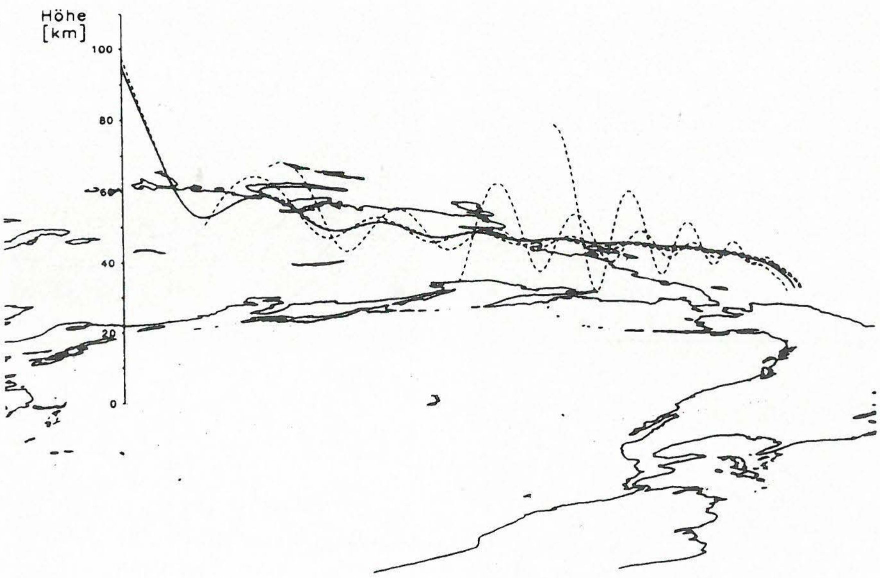
Auffindung der Öllagerstätten ist zum großen Teil mit mathematischen Methoden durchgeführt worden. Moderne diagnostische Verfahren verschwänden spurlos aus den Krankenhäusern; das Fernsehen wäre plötzlich weg (damit könnte man leben!) usw., kurz, wir hätten endlich die gute alte Zeit wieder, in der die meisten Leute mit zahnlosen Mündern herumliefen, wo man bitterlich fror und hungerte und, nicht zu vergessen, früh starb. Es wäre ganz so, wie es sich manche Apologeten und moderne Glücksbringer, und zwar gerade die akademisch gebildeten, erträumen.

Technologiekritik ist hierzulande große Mode. Herabsetzende Kritik an der Technik mag für Abkömmlinge aus wohlhabenden Elternhäusern schick sein. Aber diese Leute wissen nicht, wovon sie reden. Denn schmerzliche und bittere Erfahrungen, wie hart gerade in unserem Klima die ärmeren Menschen – und das waren fast alle – ohne Technik einst gelebt haben, müßten das auf das entschiedenste verbieten. Man findet heute wenig stille Dankbarkeit für den unschätzbaren Reichtum an Kenntnissen und Wissen, den die Großen der Vergangenheit, Männer und Frauen, hinterlassen haben. Wir dürfen ein erträgliches Leben führen, unvergleichbar dem unserer Vorfahren. Wir stehen auf den Schultern von Riesen. Viele halten sich selbst für so groß.

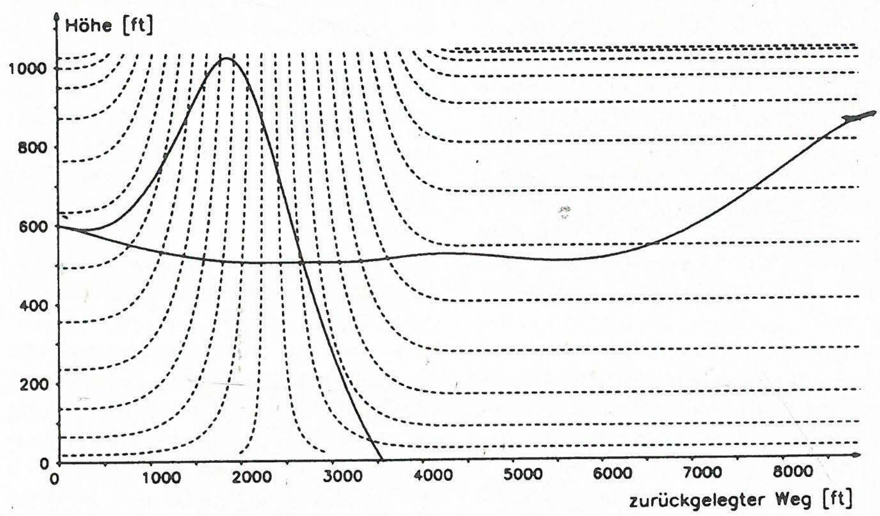
Lassen Sie mich die Tragweite der Ideen der mathematischen Wissenschaften an Beispielen aufzeigen.

Sichere Rückkehr eines Raumgleiters, des Space Shuttles, aus seiner Erdumlaufbahn zurück zum Landeplatz auf der Erde. Die Bahn soll so verlaufen, daß sie dem Fahrzeug beste Manövrierfähigkeiten verleiht und die Außenhaut des Fahrzeugs nicht heißer werden läßt als 1000 Grad Celsius. Die Berechnung einer solchen Bahn ist eine Herausforderung an die mathematischen Wissenschaften. Raffinierte, auf einen Rechenautomaten transferierte, kunstvolle Algorithmen liefern die Lösungen der Bahndifferentialgleichungen. Die Fülle der aus dem Automaten fließenden Informationen ist dabei überwältigend, unübersehbar! Doch diese reißende Flut von Zahlen läßt sich in bewegte Bilder umsetzen – ein Film zeigt schließlich die abstrakte mathematische Lösung in realen Bildern erfahrbarer Wirklichkeit: Der Raumgleiter taucht über der Südsee in die Lufthülle der Erde ein, fliegt auf leicht oszillierenden Bahnen weit nach Norden, um dann irgendwo in der kalifornischen Wüste zu landen. Aber um solche Bilder erzeugen zu können, bedarf es vieler mathematischer und informatischer Kenntnisse.

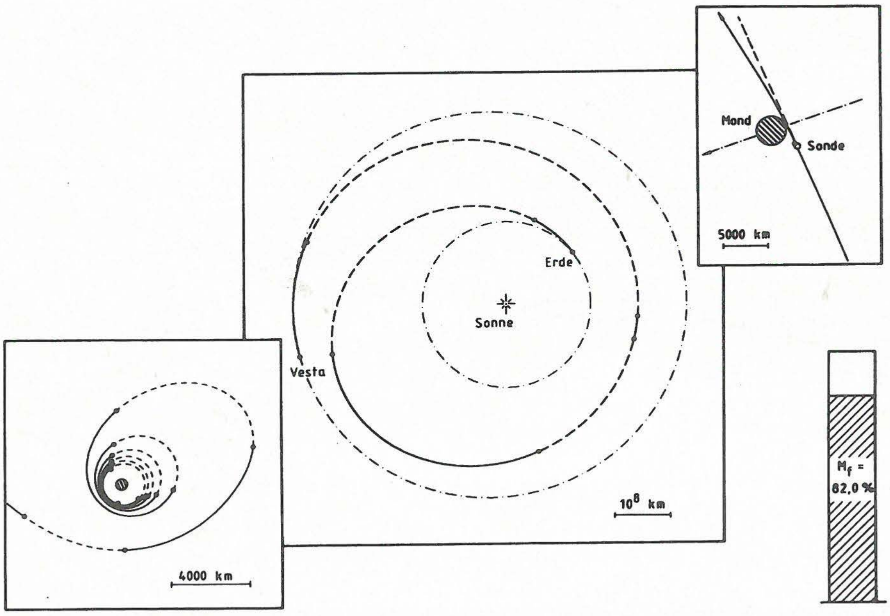
Unserem Gefühl und unseren persönlichen Erfahrungen stehen freilich sichere Flugzeuge näher als Raumfahrzeuge. Sichere Flugzeuge? Bei plötz-



Raumgleiter: Optimale (= manövrierfähigste) Flugbahn über dem Pazifik. Nicht ausgezogene Kurvenstücke - - - -: gestörte, aber bereits optimal ausgeregelte Flugbahnen.



Boeing 727: Optimale (= sicherste) Flugbahn durch Fallwinde. Die „Absturzbahn" ist miteingezeichnet.



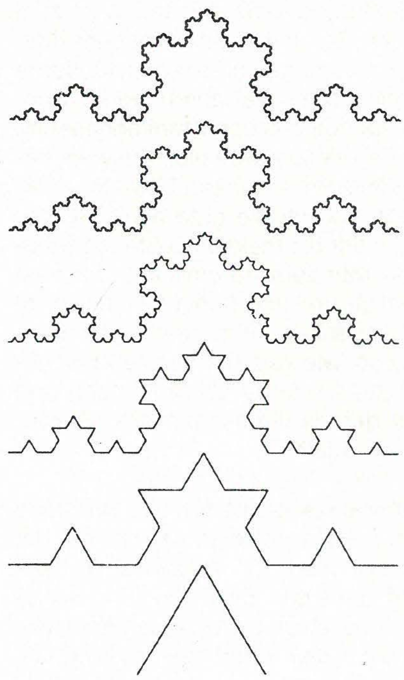
Raumsonde: Optimale (= treibstoffminimale) Flugbahn zum Planetoiden Vesta; Mond wirkt als Gravitationsschleuder; „Einschrauben" der Sonde in eine Umlaufbahn um Vesta.

lich einsetzenden und unerkannten Fallwinden über Flugplätzen sind viele Flugzeuge beim Landeanflug abgestürzt, Tausende von Personen haben dabei ihr Leben lassen müssen. Manche Flugplätze der Erde sind für solche Fallwinde berüchtigt. Wie aber soll der Pilot seine Maschine durch Fallwinde steuern? Steuert er so, wie es ihm sein antrainiertes Flugkönnen nahelegt, wird die Maschine fast mit Sicherheit abstürzen. Die Lösungen der Bahndifferentialgleichungen geben an, wie der Pilot sein Flugzeug sicher durch solche Fallwinde steuern kann. Ein Film kann den dynamischen Ablauf sichtbar machen, auch diese Erkenntnisse sind wiederum mit Hilfe der Mathematik und Informatik gewonnen.

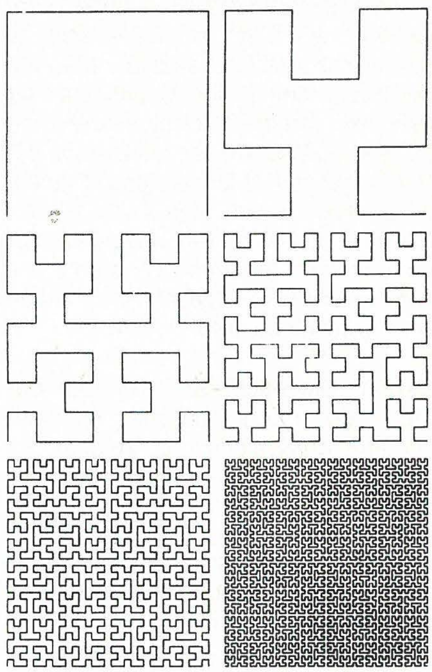
Die Berechnung der optimalen Flugbahn eines Raumfahrzeugs zu einem der Kleinplaneten, die zu Tausenden zwischen Mars und Jupiter die Sonne umkreisen, ist ebenfalls eine nicht leichte Aufgabe an die mathematischen Wissenschaften. Optimal soll die Bahn in dem Sinne sein, daß möglichst wenig Treibstoff verbraucht wird, damit die Raumsonde viel Nutzlast mit auf den Weg nehmen kann. Läßt man die Sonde dicht am Mond vorbeifliegen, wird es noch besser, das Manöver freilich auch komplizierter. Ist die Sonde schließlich bei dem Kleinplaneten – hier Vesta – angekommen, muß sie sich langsam in eine stabile Umlaufbahn hineinschrauben; ein kompliziertes Unterfangen, das der Film deutlich machen kann.

Im 19. Jahrhundert haben sich Mathematiker mit recht seltsamen Dingen beschäftigt, so zum Beispiel mit diesem: Auf die Seiten eines Dreiecks setzten sie kleinere Dreiecke, auf deren Seiten noch kleinere Dreiecke und so fort bis ins Unendliche. Das so entstehende Gebilde zeigt viel Ähnlichkeit mit einer Schneeflocke und wirklich, unter dem Mikroskop, wenn man es nur lange genug kalt hält, sehen die winterlichen Schneeflocken (fast) so aus. Die „Finalkurve" ist übrigens unendlich lang, würde man mit dem Finger über sie hinwegfahren, sie fühlte sich wie Schmirgelpapier an.

Noch so ein Kuriosum: In ein Quadrat setzen wir kleinere Quadrate hinein und in diese noch kleinere Quadrate usw. bis in alle Ewigkeit. Und das Ergebnis? Ein Streckenzug, der ein Quadrat ganz ausfüllt!

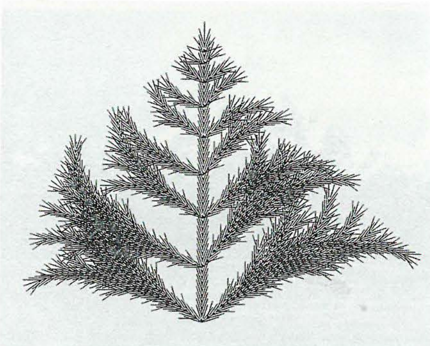


Kochsche Kurve (Schneeflocke)

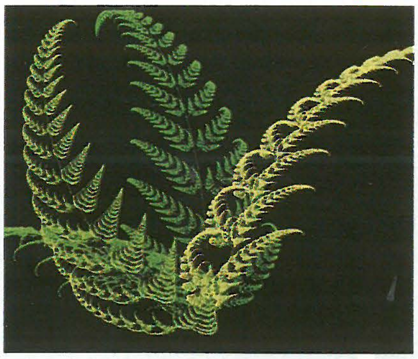


Vollständige Füllung eines Quadrats durch Linien

Die Gesetze, nach denen beide Kurven erzeugt werden, lassen sich leicht in Form eines Algorithmus, also einer genauen Berechnungsvorschrift hinschreiben. Ein Rechenautomat kann in



Mathematisch-informatische „Pflanze"
(grobe Approximation)



Mathematisch-informatische „Pflanze"
(feine Approximation)

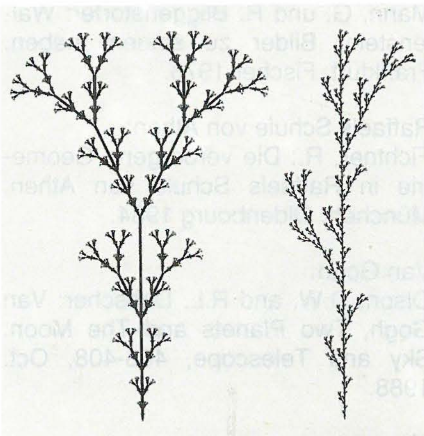
Verbindung mit einem Bildschirm die so erzeugten Kurven sichtbar machen, zwar nicht die Finalkurve, das ist prinzipiell unmöglich, wohl aber die Vorstufen, die der Finalkurve ja beliebig nahe kommen.

Wir könnten die im Grunde doch einfache Berechnungsvorschrift etwas abändern, etwa so, daß wir von dem Blatt Papier, also der Ebene, in den Raum hinaus gehen, und man könnte z.B. bei jedem Verfeinerungsschritt noch eine spiralförmige Drehung der kleinen Kurvenstückchen vornehmen. Auch sind wir nicht gezwungen, die Kurvenstücke alle gleich lang zu machen: man kann das eine kürzer, das andere länger halten, ganz so, wie es der Zufall uns eingibt. Alle diese Dinge lassen sich wieder in Form einer informatischen Anweisung, in Form eines sogenannten „String" darstellen.

Der Rechenautomat führt den Algorithmus aus. Und das Resultat auf dem Bildschirm: Es hat Ähnlichkeit mit einer Pflanze. Wir machen das Gesetz etwas komplizierter, färben das entstehende Bild ein und erhalten merkwürdige Gebilde, die mit Pflanzen jetzt größte Ähnlichkeit haben, und es liegt im Augenblick nur an unzureichenden Hilfsmitteln, daß sie nicht so vollkommen wie Pflanzen aussehen.

Ganze Landschaften lassen sich damit erzeugen!

Goethes *Metamorphose der Pflanzen* – Schiller hat sie zum Verdruß Goethes eine „Idee" genannt –, das ist die Ableitung aller Pflanzen aus einer Urpflanze nach dem Gesetz der Zusammenziehung und Ausdehnung, versehen mit einer Spiraltendenz in einem Vertikalsystem; so hat Goethe

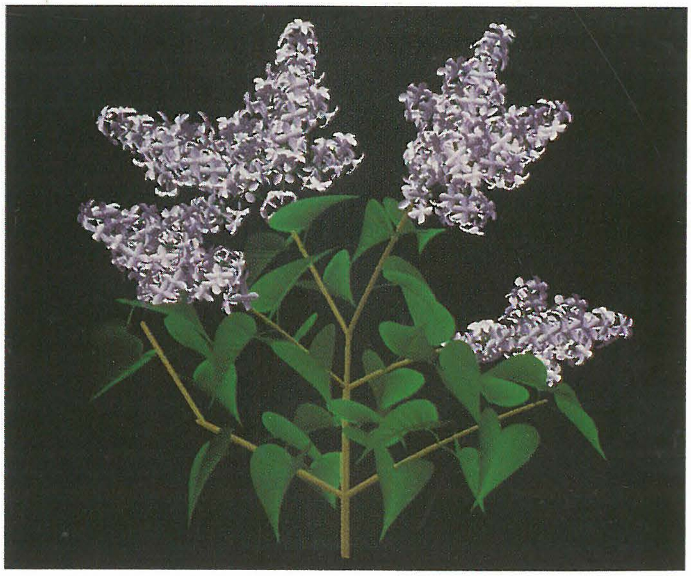


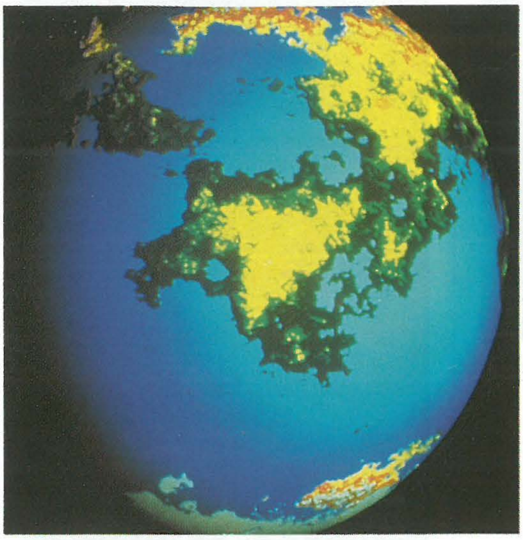
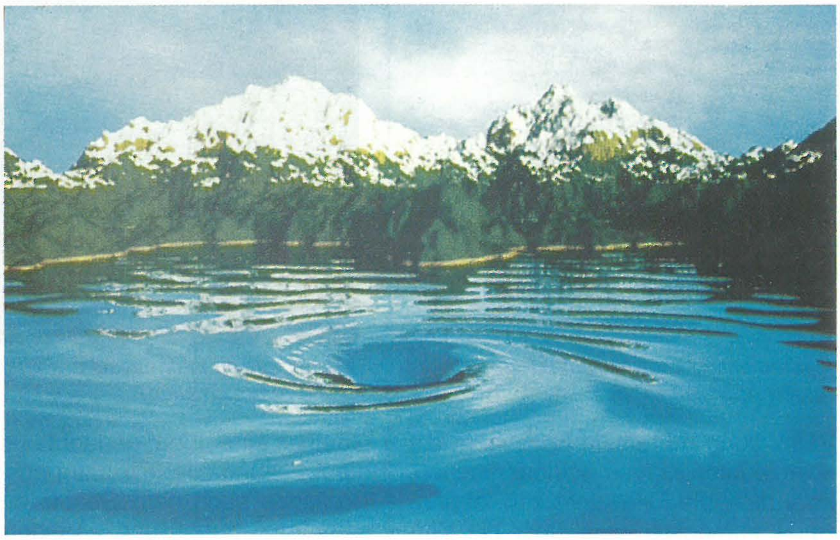
das Pflanzenreich geschaut und sich dafür den Hohn der Zeitgenossen – und auch der Nachwelt – eingehandelt. Es hat Goethe tief getroffen, aber Zeit seines Lebens hielt er selbstbewußt an dieser „Idee" fest.

Begeistert hatte er schon 1787 aus Rom

Blumen aus dem Rechner

Mathematischer Flieder



Mathematisch-informatische Kontinente und Landschaft

an Frau von Stein geschrieben:

Die Urpflanze wird das wunderlichste Geschöpf von der Welt... Mit diesem Modell und dem Schlüssel dazu kann man alsdann noch Pflanzen ins Unendliche erfinden, ...die, wenn sie auch nicht existieren, ...eine innerliche Wahrheit und Notwendigkeit haben.

Daß gerade die beiden mathematischen Wissenschaften ihm den Schlüssel für seine Metamorphose der Pflanzen liefern, würde ihn, dem stets vor allem Mathematischen graute, höchst verwundert haben. Aber was wissen wir schon. Vielleicht wäre er heute darüber glücklich.

Bildquellen

Katja Pringsheim, Palais Pringsheim: Thomas Mann-Archiv ETH Zürich.

Wallenstein:
Mann, G. und R. Bliggenstorfer: Wallenstein, Bilder zu seinem Leben. Frankfurt, Fischer 1973.

Raffaels Schule von Athen:
Fichtner, R.: Die verborgene Geometrie in Raffaels Schule von Athen. München, Oldenbourg 1984.

Van Gogh:
Olson, D.W. and R.L. Doescher: Van Gogh, Two Planets and The Moon. Sky and Telescope, 406-408, Oct. 1988.

Mozart:
Notenblatt: Bibliothek des Mozarteums, Salzburg. Anfangsgründe der Rechenkunst und Algebra von Joseph Spengler: Bayerische Staatsbibliothek, München. Mozart besaß die Auflage von 1772. Zu Mathematik und Musik vgl. G. Mazzola: Geometrie der Töne, Basel, Birkhäuser, 1990.

Raumfähre über dem Pazifik:
Kugelmann, B. and H.J. Pesch: A New General Guidance Method in Constrained Optimal Control. Part 1 and Part 2. To appear in JOTA.

Boeing 727:
Bulirsch, R., F. Montrone and H.J. Pesch: Abort Landing in the Presence of a Windshear as a Minimax Optimal Control Problem. Part 1 and Part 2. To appear in JOTA.

Vesta:
Callies, R.: Optimale Flugbahnen einer Raumsonde mit Ionentriebwerken. Technische Universität München, Dissertation 1990.

Pflanzen:
Peitgen, H.O., D. Saupe: The Science of Fractal Images. Heidelberg, Springer 1988. Drösser, Ch.: Die Regeln des Chaos. GEO, Heft 5,1989.