Nutz und Frommen der Mathematik

von Roland Bulirsch

Festrede, gehalten in Oberwolfach am 1.10.1994, zum 50-jährigen Bestehen des Mathematischen Forschungsinstituts Oberwolfach. Von den im Vortrag gezeigten 130 Bildern sind hier nur einige wiedergegeben. Darüber hinaus wurden noch Filme gezeigt.

Wer besser in Geometrie und Mechanik bewandert ist als ich und meine Gedanken umständlich findet, möge bedenken, daß ich nicht für ihn rede ... den Eingeweihten aber billige ich das Recht zu dem Vorwurf zu, ich hätte mich nicht auszudrücken verstanden ...

Das paßt hierher, geschrieben aber vor langer Zeit, vor 200 Jahren, von Jakob Neuhaus auf Schloß Waldstein im böhmischen Dux. Der Liebhaber-Mathematiker Neuhaus hatte gerade ein altes mathematisches Problem gelöst, er glaubte es wenigstens: einen Würfel, doppelt so groß wie einen anderen, vorgegebenen Würfel nur mit Zirkel und Lineal zu konstruieren. Dieser Würfel war eigentlich der Altar des Gottes Apollon auf der heiligen Insel Delos, einer Insel der Kykladen, und an der Aufgabe, den Altar des Gottes zu verdoppeln, hatten sich schon viele vergeblich versucht. Eigentlich muß man nur jede Altarseite mit $\sqrt[3]{2}$ multiplizieren; aber $\sqrt[3]{2}$, ein unendlicher Dezimalbruch, ungefähr 1,26, ist nicht exakt mit Zirkel und Lineal konstruierbar, was freilich ohne alle praktische Bedeutung ist. Neuhaus findet 1,25824175, das ist ein bißchen zu wenig, und der Neuhaus'sche Altar wird nicht doppelt so groß, sondern nur 1,99 mal, ein Hundertstel fehlt. Wir könnten damit gut leben, aber es war auch nicht das Problem, es ging, wie halt oft, nur um das Grundsätzliche; und vielleicht war Apollo über Neuhaus erzürnt, daß sein Altar zu klein wurde. Er war auch ein böser Gott und ging nicht zimperlich mit Widersachern um. Die alten Griechen haben Apollo, den Vernichter, gefürchtet.

Seinem teuren *Jacomius*, so hat der österreichische Feldherr, der Fürst von Ligne, Jakob Neuhaus gerufen, – seinem teuren Jacomius hatte de Ligne die Stelle in Dux verschafft. Dieser de Ligne muß ein ganz besonderer Mensch gewesen sein: Liebling der Götter und der Menschen hat man ihn genannt, für Voltaire war er der liebenswürdigste Mensch Europas, für Goethe der froheste Mann des Jahrhunderts. Aber zurück zu Jakob Neuhaus.

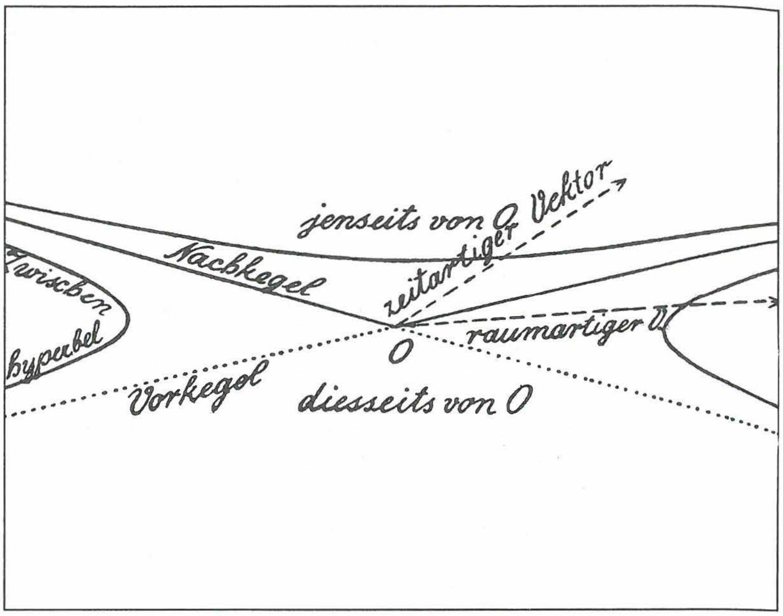
Dieser, der liebe Jacomius, hatte ein abenteuerliches Leben hinter sich. Man erzählt, daß er sogar an einem Libretto für eine Oper mitgewirkt habe, beim Inhalt der Oper war er sachverständig; und auch der Komponist der Oper war ein Liebhaber der Mathematik. Es wird die Oper aller Opern, Neuhaus ist bei der Uraufführung in Prag dabei.

Warum soviel Neuhaus? Sie kennen ihn alle: Sie kennen ihn unter seinem Namen *Casanova, Giacomo Casanova*. Er war ein Liebhaber der Mathematik, auch der Mathematik. Und die Oper mit dem Libretto von Da Ponte? Mozarts *Don Giovanni*.

Don Juan oder die Liebe zur Geometrie heißt ein Theaterstück von Max Frisch, dem Schweizer Dichter: Die Höllenfahrt des Don Juan als ein von ihm, Don Juan, selbst inszeniertes Spektakel, um den Nachstellungen der Welt entfliehen und in einer Klosterzelle endlich ungestört Mathematik treiben zu können. Im Nachwort verwischt Frisch die Spuren zu Casanova, legt eine neue Fährte: seine Bühnenfigur ähnele dem Faust, sagt er. In Goethes Dichtung kommt aber wenig Mathematik vor, nur im Einmaleins der Hexe ... *aus Fünf und Sechs/ mach Sieben und Acht/ und Neun ist Eins/ und Zehn ist keins* ... die Hexe rechnet modulo 2; manche modernen Prozessoren rechnen auch so, nur viel schneller. Hilfe der Mathematik für seine *Farbenlehre* wäre Goethe willkommen gewesen: ... *Vielleicht interessirt sich auch noch einmal ein La Grange für diese Angelegenheit* ..., hatte er gehofft, weil, wie er von sich bekennt, er hier an der Grenze steht, die Gott und Natur seiner Individualität bezeichnen wollten: ... *Ich bin auf Wort, Sprache und Bild ... angewiesen und völlig unfähig durch Zeichen und Zahlen auf irgendeine Weise zu operiren* .... In seinen hinterlassenen Aufzeichnungen lesen wir: ... *alle materielle Massen gestalten sich nach einem allgemeinen Gesetz, und dieses Gesetz offenbaren uns die Gebirge, ... Gestaltung einer Masse setzt ... voraus ... daß sie ... in ... untereinander ähnliche Teile sich trenne.* ... [Das] *ist die geometrische Grundlage der Welt.* ... Erst jetzt entdeckte die fraktale Geometrie, daß sich Gebirgskonturen als Resultate mathematischer Prozesse beschreiben lassen, die unendliche Folgen selbstähnlicher Teile sind. Wenige Jahre vor seinem Tode bekannte Goethe seinem Kölner Freund Sulpiz Boisserée: ... *als ethisch-ästhetischer Mathematiker muß ich in meinen hohen Jahren immer auf die letzten Formeln hindringen, durch welche ganz allein mir die Welt noch faßlich und erträglich wird* .... Vielleicht deshalb konnte ein anderer Mathematiker den Faust fehlerfrei aufsagen, von vorn bis hinten: Hermann Minkowski.

Ich schaue das verheißene Land schreibt der große französische Mathematiker Hermite 1896 über Minkowskis Buch „Von der Geometrie der Zahlen".

Mathematische Landschaft aus dem Rechner



Zeitkegel der Relativitätstheorie aus Minkowskis Kölner Vortrag

Je crois voir la terre promise schreibt er seinem Freund Laugel. 1880, Minkowski beginnt das Studium der Mathematik in Königsberg. Er ist 16 Jahre alt. Zwei Jahre später reicht er bei der Pariser Akademie die Lösung einer Preisaufgabe ein. Entgegen den Vorschriften ist sie in Deutsch abgefaßt. Die französischen Mathematiker sind von der Lösung beeindruckt, sie erkennen Minkowski den großen Preis der mathematischen Wissenschaften zu; über die Vorschrift, nur Arbeiten in französischer Sprache anzunehmen, setzen sie sich hinweg. In der französischen Presse hagelt es Vorwürfe; es ist 1883, 12 Jahre nach dem deutsch-französischen Krieg. Aber die großen französischen Mathematiker stehen hinter ihrer Entscheidung. *Arbeiten Sie*, schreibt Camille Jordan aus Paris an Minkowski, *arbeiten Sie, um ein hervorragender Geometer zu werden. Travaillez, je vous prie, à devenir un géomètre éminent*; der ist gerade 19 Jahre alt.

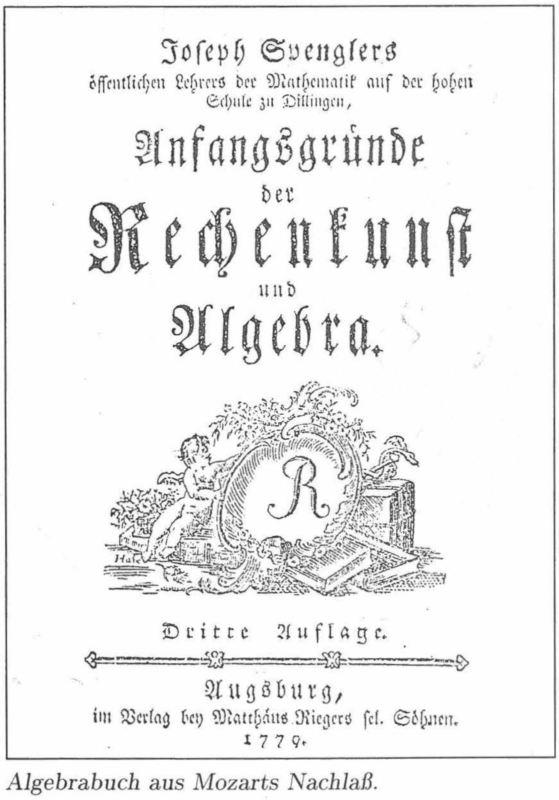
25 Jahre später, 21. September 1908, Minkowski hält auf der Versammlung der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte in Köln einen epochemachenden Vortrag, Titel: *Raum und Zeit*. Der große Minkowski legt darin seine, von ihm gefundenen mathematischen Grundlagen der Relativitätstheorie dar. Minkowski ist neben Einstein einer der Begründer der Relativitätstheorie. Der Kenner des Faust, Minkowski, in Köln:... *Von Stund an sollen Raum für sich und Zeit für sich völlig zu Schatten herabsinken, und nur noch eine Art Union der beiden soll Selbständigkeit bewahren* .... Minkowskis früher Tod, 1909, hat uns wahrscheinlich um tiefe Einblicke in Raum und Zeit gebracht.

Um die gleiche Zeit schreibt ein anderer: ... *Die Mathematik ist Tapferkeitsluxus der reinen Ratio, eine der wenigen, die es heute gibt. ... Man kann sagen, daß wir praktisch völlig von den Ergebnissen dieser Wissenschaft leben. ... Dieses ganze Dasein, das um uns läuft, ... ist nicht nur für seine Einsehbarkeit von der Mathematik abhängig, sondern ist effektiv durch sie entstanden, ruht in seiner Existenz auf ihr. ...* Dieser andere war der deutsche Dichter mit dem böhmischen Namen *Musil*. Einen der allerklügsten Menschen hatte man ihn genannt; es wird wohl wahr sein [1].

Jetzt aber haben wir Mozart aus den Augen verloren. Mozart: Rechnen war eine seiner Leidenschaften. Ein Algebrabuch fand man in seinem Nachlaß, dazu ein Notenblatt, auf dem er die Anzahl der Weizenkörner ausrechnen wollte, die sich der Erfinder des Schachspiels als Lohn erbat. Sie wissen es: Auf das erste Feld 1, auf das zweite Feld 2, das dritte 4, dann 8, dann 16 Weizenkörner und so weiter. Das gibt eine irrsinnige Menge: $2^{64} - 1$ Körner, soviel Weizen trägt die ganze Erde nicht.

[1] Robert Musil (musíl: partizip perfekt von tschechisch „müssen"). Dipl.-Ing., Studium von Philosophie und Mathematik in Berlin, den mathematischen Teil seiner Doktorprüfung nimmt H. A. Schwarz ab. Wie viele große Deutsche muß er flüchten, als die lange Nacht über Deutschland fällt; Tod im Schweizer Exil. Die Londoner *Times* nennt ihn den vielleicht größten deutschsprachigen Dichter dieses Jahrhunderts.

Potenzen der Zahl 2, korrekt bis $2^{24} = 16777216$; *(Mozarteum Salzburg)*
größte auf dem Notenblatt stehenden Zahl $160471494361488 \approx 2^{47} = 140737488355328$.

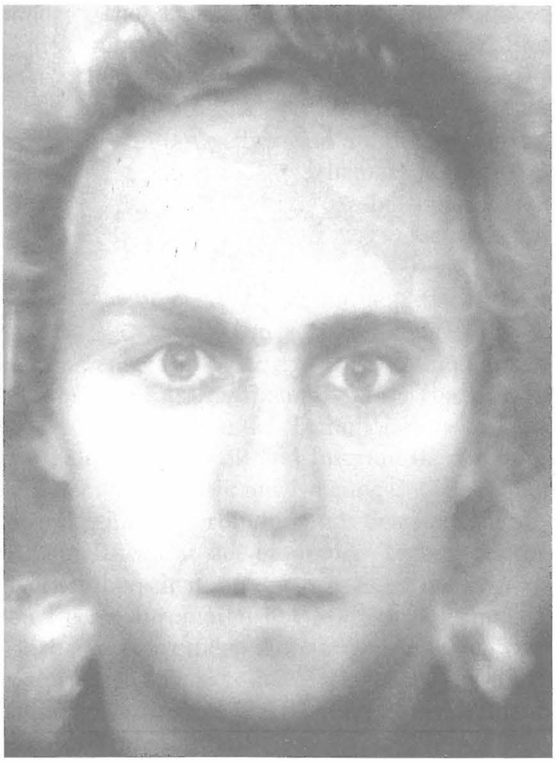


Joseph Spenglers
öffentlichen Lehrers der Mathematik auf der hohen Schule zu Dillingen,
Anfangsgründe
der
Rechenkunst
und
Algebra.

Dritte Auflage.

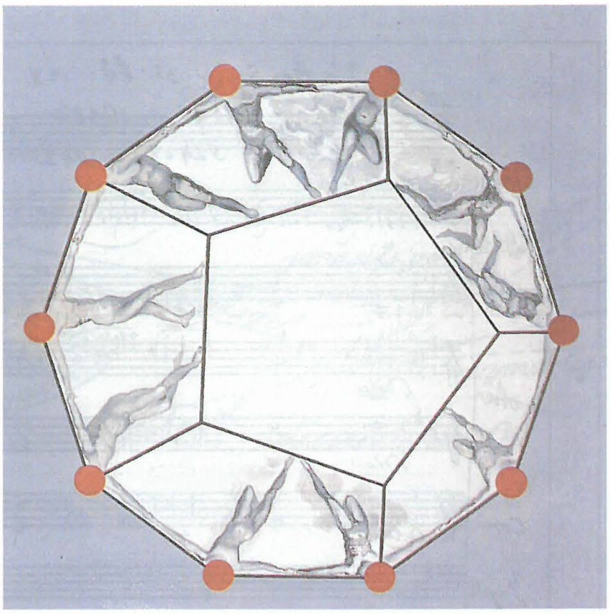
Augsburg,
im Verlag bey Matthäus Riegers sel. Söhnen.
1779.

Algebrabuch aus Mozarts Nachlaß.

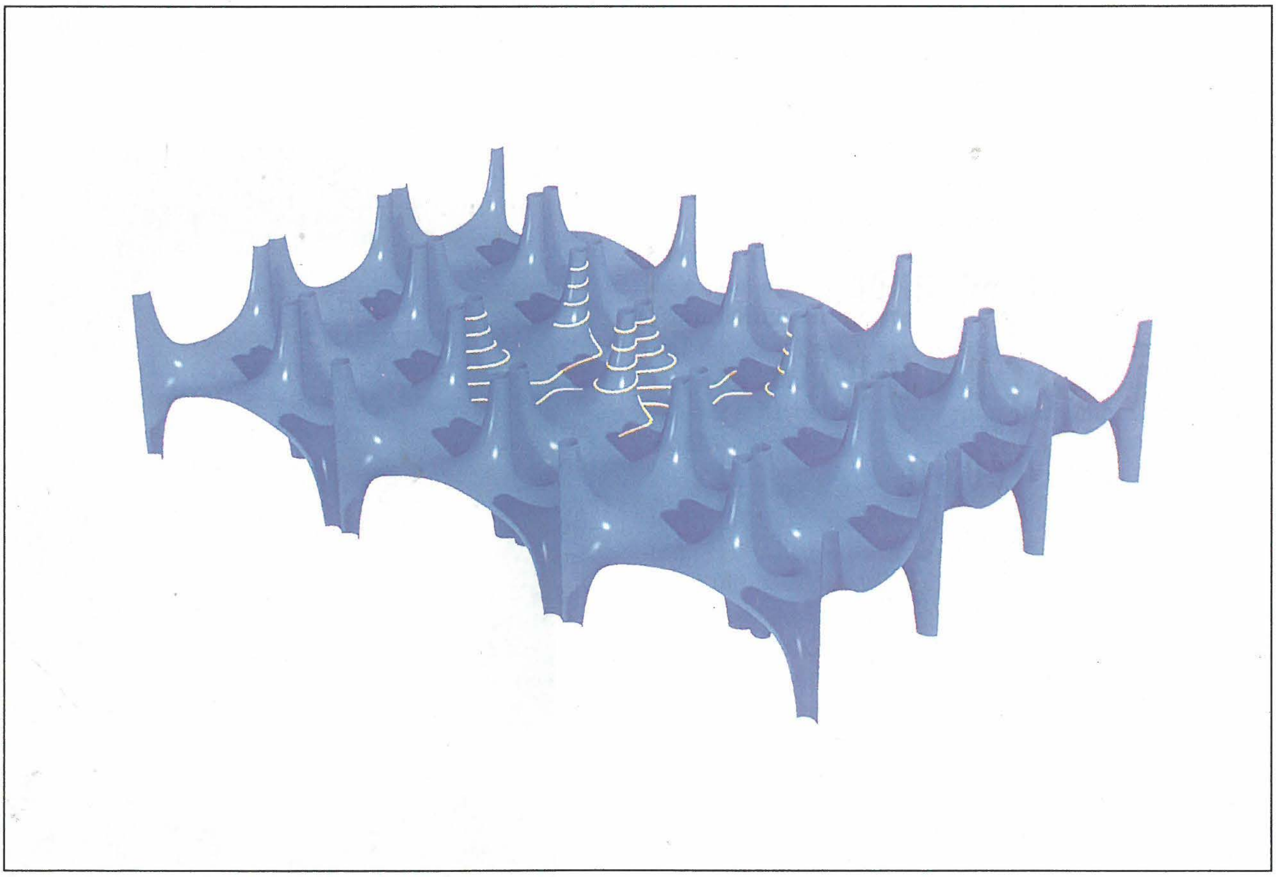


Phantombild von Mozart. (Reiß-Museum Mannheim)

Das ist er selber, auf einem Phantombild angefertigt nach alten Gemälden und Bleistiftzeichnungen, die wir von ihm haben. Zur Erzeugung von Phantombildern braucht man viel Mathematik. Die steckt auch in der Musik, sagt man. Karajan hatte zu seinen *Salzburger Gesprächen* auch Mathematiker geladen; tatsächlich, manche große Dirigenten hatten Mathematik studiert. Für den Dichter Novalis offenbart sich Mathematik in Musik, aber wir müssen nicht gleich so hoch greifen. - Nur als Kuriosum vermerkt: die Katalanen tanzen ihren Nationaltanz, die Sardana, nach Regeln, die für Nichtkatalanen unbegreiflich sind. So z. B. muß der Schlußschritt auf den 21., 25., 29. u. s. w. Takt fallen oder aber auf den 65., 73., 81 u. s. w. Takt. Es ist noch komplizierter. Die mathematische Zahlentheorie weiß die Antwort: in den drei Tanzfolgen der Sardana wird die erste Sequenz mit Tanzschritten modulo 4 und Restklassen 1 und 3 getanzt, die zweite Sequenz mit Tanzschritten modulo 8 und Restklassen 1, 3, 5 und 7. Genug davon.



Dalí: Pentagonale Sardana.



Jacobische elliptische Funktionen.

1825 veröffentlicht der Ritter der Ehrenlegion, Mitglied der Pariser Akademie, Legendre seine *Abhandlungen über elliptische Funktionen und Eulersche Integrale*. Diese Funktionen tauchen bei physikalischen Beschreibungen vieler Naturvorgänge auf: Bei der Bewegung eines Pendels (Kreiselkompaß), bei Störungen der Planetenbahnen, bei der Durchbiegung von Trägern; wir begegnen ihnen jeden Tag, wenn man mit dem elektrischen Rührer Schlagrahm macht, staubsaugt, oder im Krankenhaus im Kernspintomographen liegt und Kopf und Gehirn nach Tumoren abgetastet werden, die starken Magnetfelder im Tomographen werden durch diese Funktionen beschrieben. Auf Kinderspielplätzen und Trainingsstätten für Boxer kann man Legendres bzw. Jacobis Funktionen sogar sehen: beim Seilhüpfen nimmt das Seil die Gestalt dieser Funktionen an. Legendre weiß das alles nicht, aber sein genialer mathematischer Instinkt weist ihm den Weg. – In Frankreich gibt es in vielen Städten eine Rue Legendre, sogar manche Schnapswirte wissen dort, wer Legendre war. Fragen Sie einmal hier herum, nach einem deutschen Mathematiker. – Im Buch von Legendre findet sich auch eine Zahlentafel mit 16 000 Zahlenwerten für diese Integrale. Aus Paris schrieb er damals seinem deutschen Kollegen Jacobi im ostpreußischem Königsberg: *...ich habe mich der längsten ...Arbeit meines Lebens hingegeben um die Tafeln zu erstellen*. Legendre hatte für die Rechnungen 20 Jahre gebraucht, 20 Jahre mühseligster Arbeit. Für Physik und Technik waren die Zahlentafeln unendlich wichtig. Bei naivem Ansehen ist das Tafelwerk freilich nichts weiter als eine Art Telefonbuch ohne Namen, nur mit Telefonnummern. Aber die Zahlenbeziehungen der Tafel lassen sich in Bilder umsetzen, und das sieht dann so aus.

Wir ahmen Legendre nach und setzen seine Formeln in ein Computerprogramm um, das ist ein in einer formalen Sprache nach strengen Regeln verfaßter Text. Wir reichern das Programm mit neueren Erkenntnissen über die elliptischen Integrale an. In eine der neueren Rechenmaschinen lesen wir das Programm ein. Es enthält neben dem eigentlichen Algorithmus, das ist ein Befehlsablauf für die Maschine, wie sie die Integrale berechnen soll, auch eine Zusatzanweisung zur Erzeugung der Tafeln, so, wie Legendre sie vor 200 Jahren angelegt hatte. Die Maschine beginnt. Wir müssen nicht lange warten. Nach einer viertel Sekunde ist sie fertig! Nur das Ausdrucken der mehr als 16 000 Zahlen dauert länger.

20 Jahre Fronarbeit in den Bruchteil einer Sekunde komprimiert! Ist das zu begreifen?

Der Computer hat Legendre und die ganze Mathematik überflüssig gemacht. Die uralte, dreitausendjährige Wissenschaft von den Zahlen und ihren

Gehirn; die Sehnerven sind deutlich zu sehen. Tomographie. (Werkbild Siemens)

Beziehungen zueinander überflüssig? Ein großer Irrtum! Das genaue Gegenteil ist richtig. Noch nie in ihrer Geschichte war Mathematik für Menschen, die von der Technik leben müssen, so bedeutsam wie heute. *Hochtechnologie ist mathematische Technologie*, ein Schlagwort von jenseits des Atlantik. Und wirklich, *Hochtechnologie ist sehr häufig mathematische Technologie*. Die schnellen Rechenautomaten haben es möglich gemacht, Beziehungen zwischen Zahlen schnell aufzulösen, vorausgesetzt, man kann diese Beziehungen in Form eines Algorithmus, einer genauen Rechenvorschrift beschreiben und auf die Sprachebene der Maschine übertragen. Mathematik könnte sich im Rechenautomaten selbst bespiegeln, was hätte sie davon. Aber die von ihr gefundenen Gesetze helfen anderen Wissenschaften: Immer dann, wenn sich in der Natur Beziehungen durch mathematische Gleichungen beschreiben lassen – sehr häufig sind das mehr oder weniger komplizierte Differentialgleichungen – immer dann ist Mathematik einsetzbar. In der unbelebten Natur und in der Technik ist das fast immer der Fall. Mathematik und Informatik, das jüngste Kind der Mathematik mit Neigung und Begabung für Technik, sind in Verbindung mit den Rechenautomaten zum Rückgrat der modernen Technik geworden. Gerne übersehen, an der Schaffung der elektronischen Rechenautomaten hat Mathematik und haben Mathematiker großen Anteil. Aber möglich wurde der universelle Einsatz der Mathematik erst durch die Miniaturisierung der elektrischen Bauteile, insbesondere des Transistors.

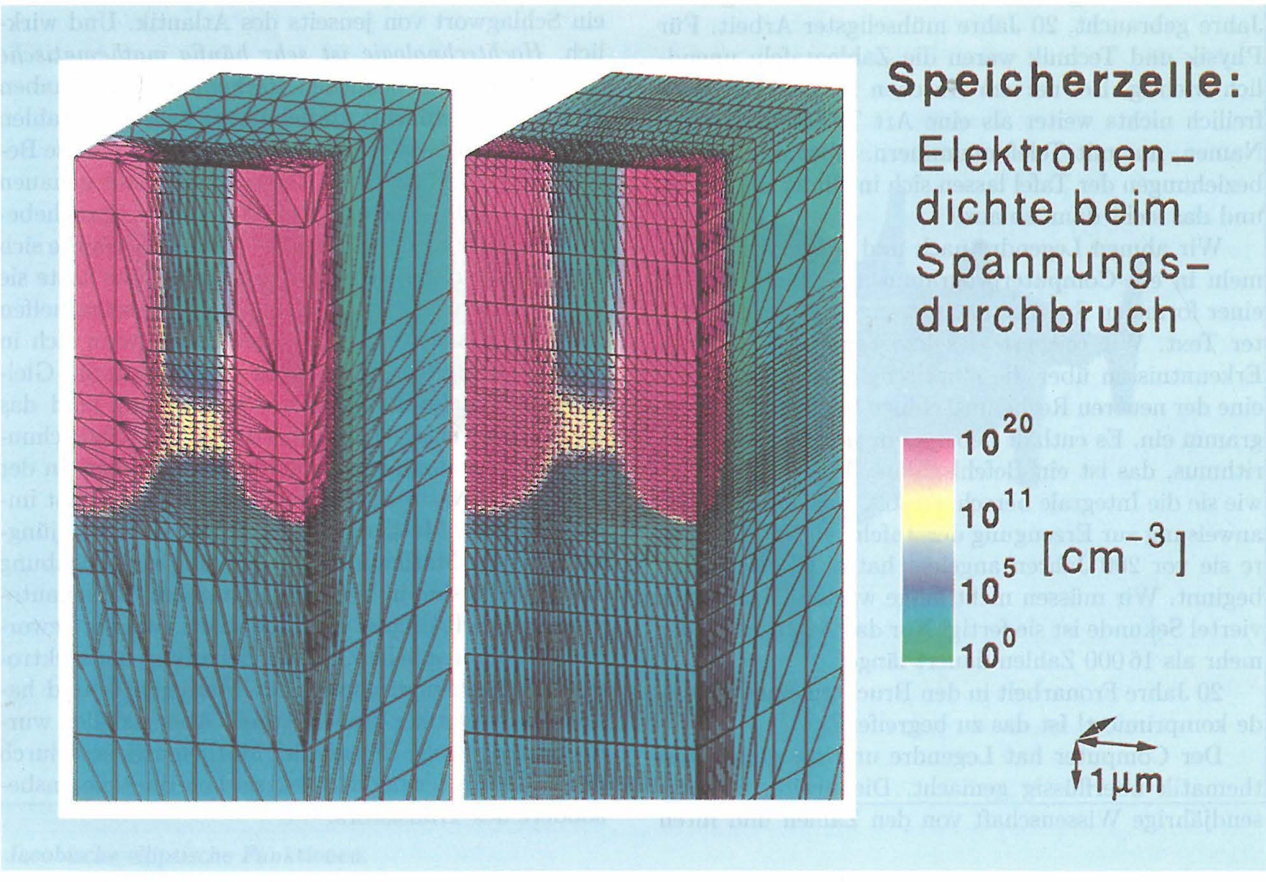
Kurz nach dem letzten Kriege wurde die Verstärkerwirkung einer simplen Vorrichtung entdeckt: Zwei Drähte aus Phosphorbronze liegen auf einem Germaniumkristall an. Damit ließen sich, wie bei einer Elektronenröhre, schwache elektrische Spannungen verstärken. „Übertragungswiderstand" hieß das Ding, englisch *transfer resistor*. Zusammengezogen wurde daraus der *Transistor*. Eine umwälzende Erfindung, 1956 erhielten die Entdecker Bardeen, Brattain und Shockley den Nobel-Preis. Die Erfindung war nicht zufällig, keineswegs vom Himmel gefallen: Schottky, Sohn eines Mathematikprofessors, und andere hatten schon Ende der 20-iger Jahre in den Siemens-Laboratorien Gleichrichtereffekte an Kupferoxydul- und Selen-Grenzschichten studiert. Die Hinzunahme einer dritten Elektrode war eigentlich nur folgerichtig.

Ein Metall-Oxyd-Silizium Transistor; seine Elektroden tragen auch bei uns englische Bezeichnungen, in Deutschland gilt das als fortschrittlich. Silizium, im wesentlichen geschmolzener Sand. Zur Herstellung der Transistoren genügte bald bloße Experimentierkunst, intuitives Bauen, nicht mehr. Insbesondere die Miniaturisierung der Bausteine in den Rechenautomaten zwang zu genauer Vorhersage des elektrischen Verhaltens der Transistoren, noch ehe sie in Fertigung gegangen waren.

Man fand heraus, daß das funktionale Verhalten der Transistoren durch die Lösungen eines Systems der Ordnung 6 von partiellen Differentialgleichungen vom elliptischen Typus beschrieben werden kann. Solche Gleichungen zu lösen war ein schwieriges Problem. An Verfahren zur numerischen Lösung der Halbleitergleichungen hat man intensiv gearbeitet und mit den Lösungen die „Halbleiterwirklichkeit" relativ gut vorhersagen können.

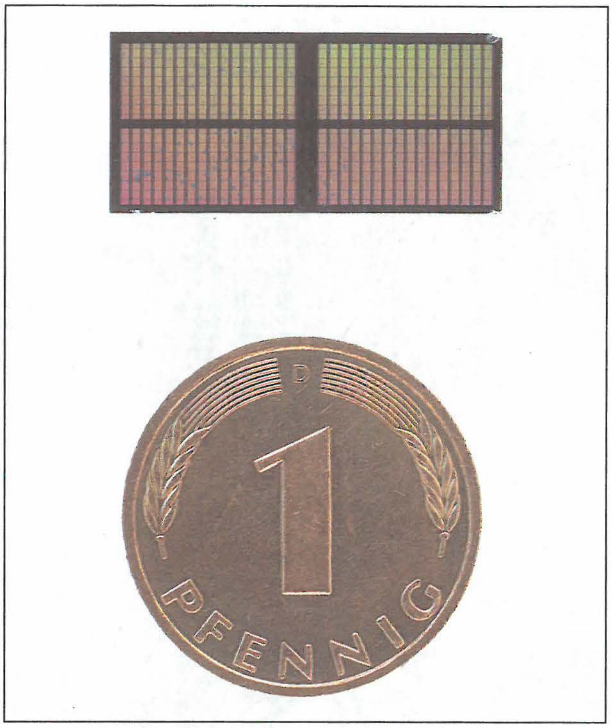
Auf die Mathematik war man auch angewiesen, als viele solcher Transistoren zu ganzen funktionalen Blöcken verknüpft werden sollten, den sogenannten „Chips". Das ist ein Blättchen aus Silizium, auf dem die Transistoren in einem komplizierten technischen Prozeß eingeätzt sind. Wie der Block arbeitet und welche Spannungen und Ströme man an den Zuführungsdrähten, den „Beinchen" des Chips, abnehmen kann, läßt sich wieder aus den Lösungen von Differentialgleichungen – jetzt sind es nur gewöhnliche Differentialgleichungen, dafür aber viele, tausende, hunderttausende! – mit guter Genauigkeit vorhersagen.

Auch die Plazierung und Verdrahtung der Transistoren und Kondensatoren auf dem Chip ist eine mathematische Aufgabe, eine aus der diskreten Mathematik.

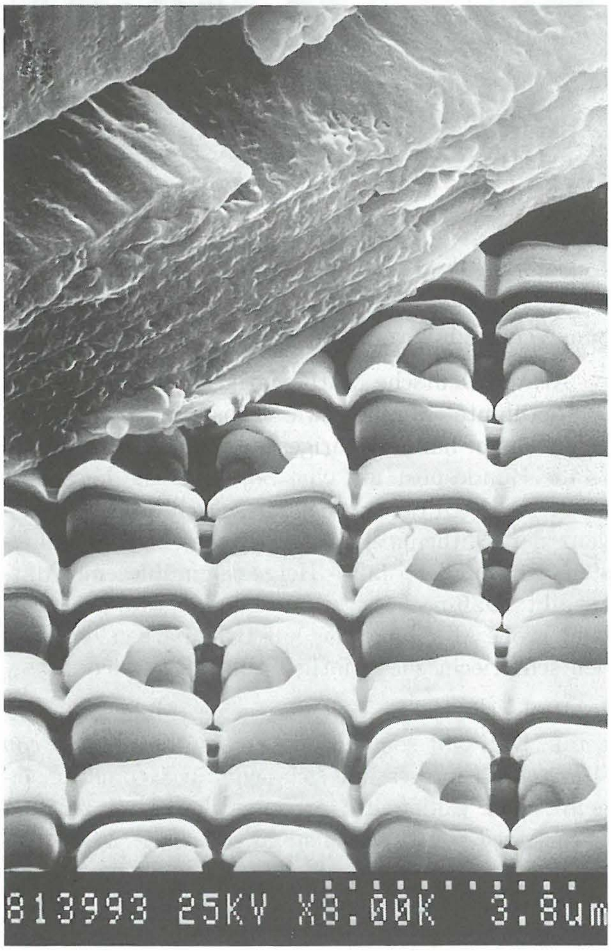


Ein elektronisches Addierwerk kann nur ganz wenig: $0+0=0$, $1+0=1$, $1+1=2$. In einem Chip hängen viele solcher Addierwerke zusammen. Was ist daran schon besonderes? Wenn es hochkommt, wird der Mensch etwa hundert Jahre alt, dann hat er etwa 3 Milliarden Sekunden gelebt. Die Addition von $1+1=2$ dauert etwa eine Sekunde; drei Milliarden solcher Additionen kann der Mensch in seinem ganzen Leben ausführen, Tag und Nacht muß er rechnen, hundert Jahre lang! Ein Prozessor kann auch drei Milliarden solcher Binärziffern addieren, aber in einer Sekunde. Oder anders gesprochen: Er kann hundert Millionen zehnstellige Zahlen in einer Sekunde addieren; die Multiplikation kann etwas länger dauern.

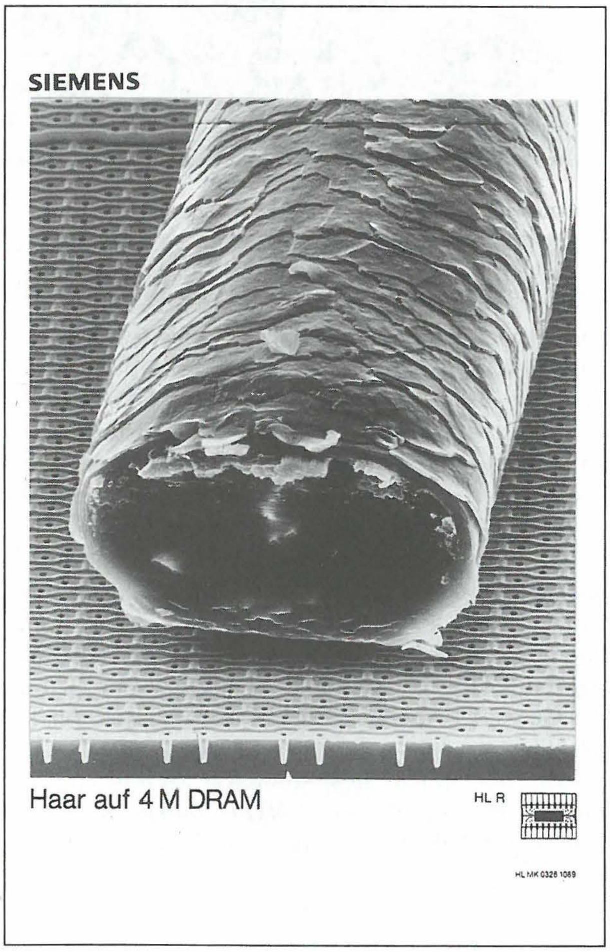
Auf einem Speicherchip, einem 4 Megabit Chip, sitzen vier Millionen Transistoren, dicht an dicht gepackt. Was kann er speichern? Goethes Faust z. B., Teil I und Teil II. Ein 16 Megabit Chip enthält etwa 16 Millionen Transistoren auf der Fläche von einem Pfennig. Die Bibel, Altes und Neues Testament zusammen, könnte man darauf speichern. Freilich ohne schöne Illustrationen, wie z. B. die von Doré, da gehen vielleicht zwanzig solcher Bilder auf den Chip.



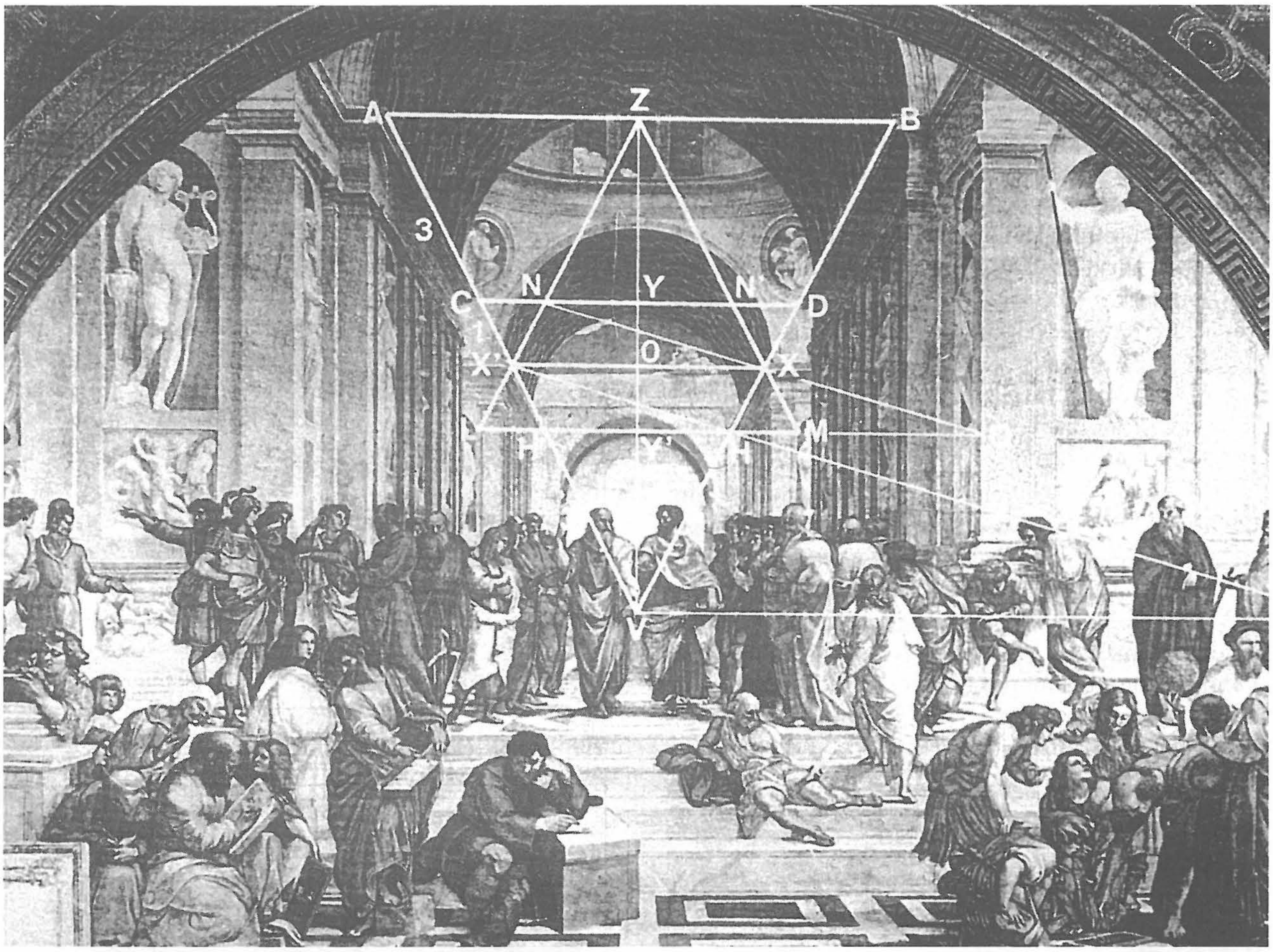
16 Megabit Chip. (Werkbild Siemens)



4 Megabit Chip mit Haar. (Werkbild Siemens)



4 Megabit Chip mit Haar. (Werkbild Siemens)



Geometrie in Raffaels „Schule von Athen“.

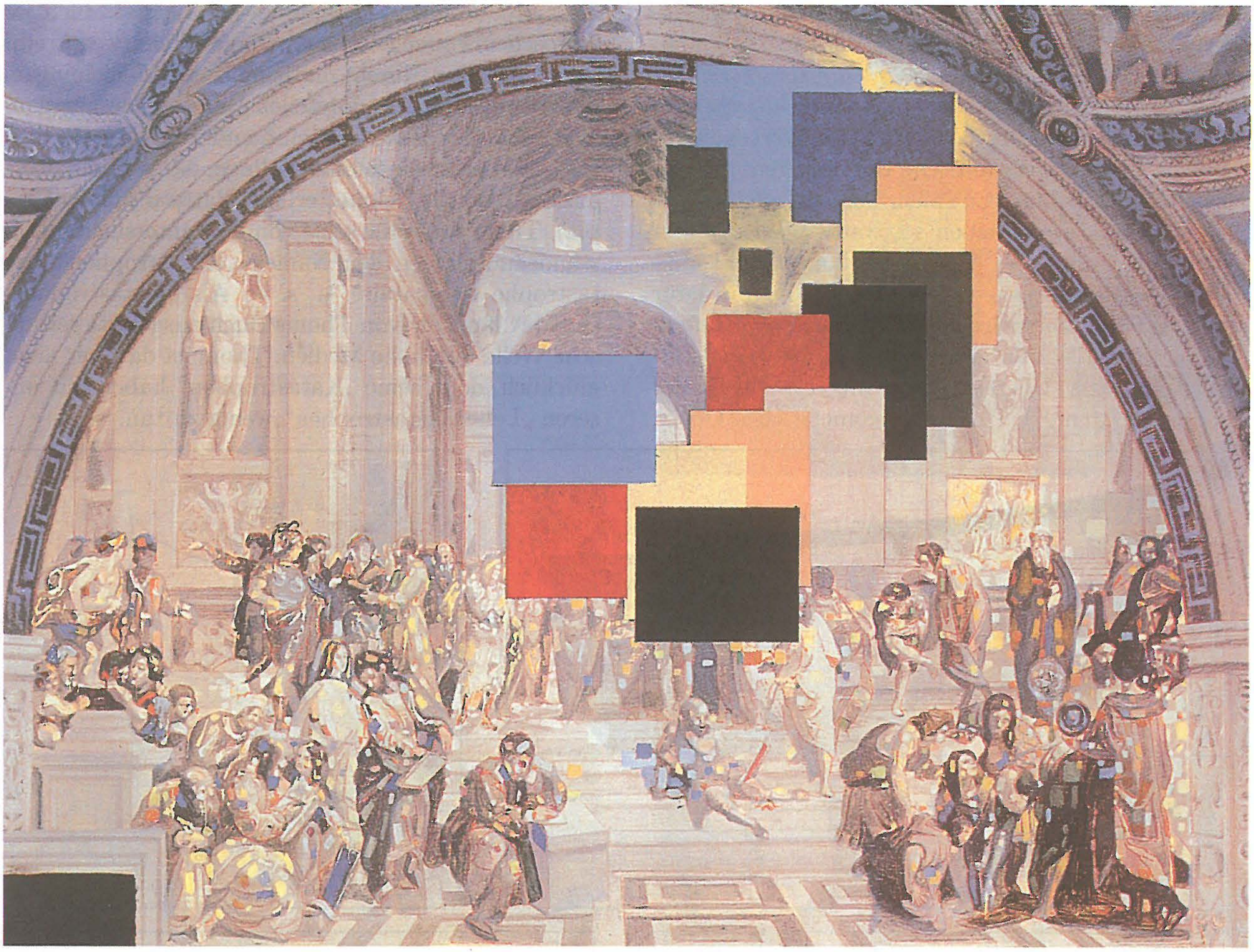
In der Renaissance entdeckt die Kunst die Geometrie; die verschütteten mathematischen Dogmen architektonischer Vollkommenheit werden wieder ausgegraben. Vollkommenheit, so die revolutionäre Entdeckung der Antike, ist mathematisch bedingt. Es war die Überzeugung der großen Baumeister der Renaissance, daß die sichtbare Welt, dort, wo sie sich in geometrisch vollendeter Kirchenarchitektur zeigt, die metaphysische erschließt[2].

Es ist wahr: Dürer sieht in der Geometrie eine Offenbarung der Naturgesetze, und Raffael begreift sich mehr als Geometer denn als Maler. In seiner *Schule von Athen* feiert er die Geometrie, zeigt uns Philosophen, Geometer und stellt sich selbst zur Gruppe der Geometer rechts im Bild. Michelangelo, Leonardo da Vinci: Kunst ist für sie ohne Mathematik, Geometrie, undenkbar. Leonardo: *Keiner lese mich, in meinen Werken, der nicht Mathematiker ist.* Es belustigt, daß bei Übersetzungen der Werke der großen Italiener ins Deutsche entsprechende Passagen immer weggelassen sind. Nördlich der Alpen paßt es nicht zum Verständnis von Kunst.

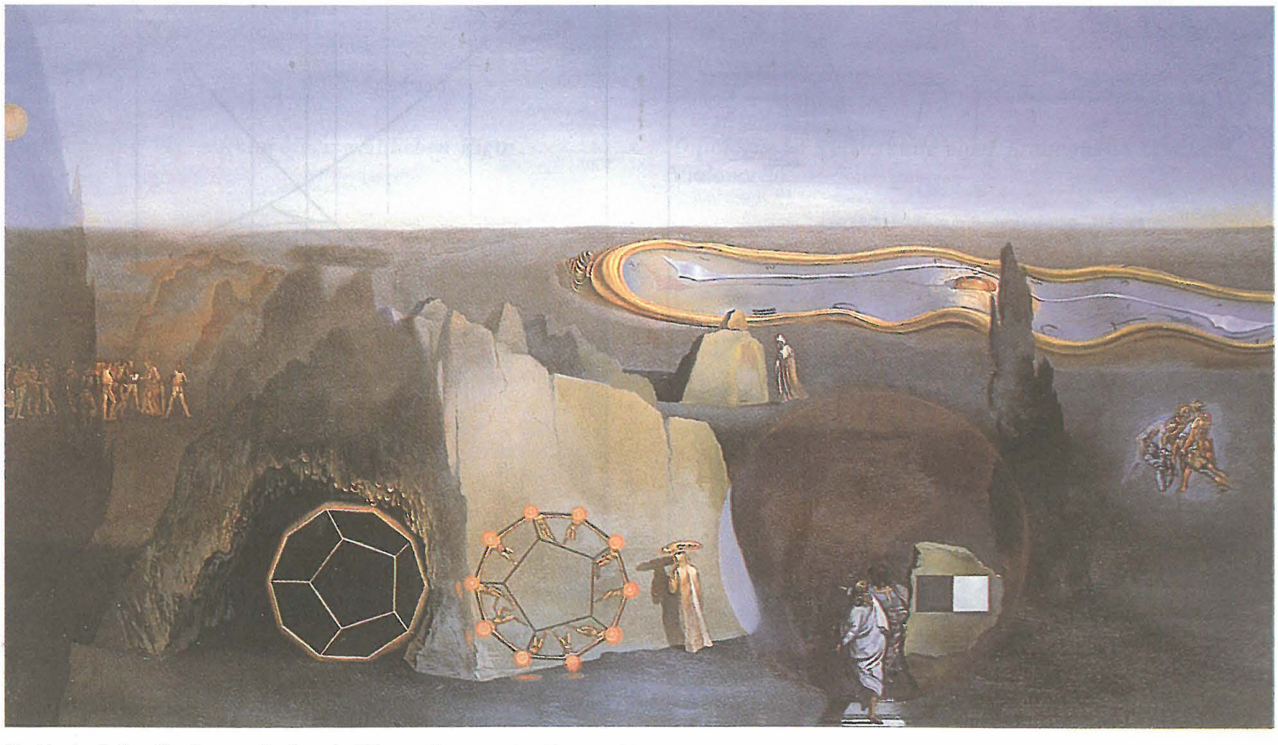
Als die Deutsche Mathematiker-Vereinigung, der so berühmte Männer wie Einstein, Planck angehörten, ihr hundertjähriges Jubiläum feierte, lehnte es die Bundespost ab, eine Sondermarke herauszubringen, wegen der geringen gesellschaftlichen Relevanz der Mathematik. Da tröstet es, daß es wenigstens für hundert Jahre Herzogsägmühle eine Marke gibt. Dafür ehren kleine Länder wie Griechenland große Mathematiker auf Briefmarken, wie den deutsch-griechischen Mathematiker Carathéodory.

Raffael hatte es dem spanischen Maler Dalí angetan. Dalí gibt seine eigene Version der *Schule von Athen*. Dalí interessiert sich sehr für Geometrie, einem seiner Bilder gibt er sogar den Titel *Auf der Suche nach der 4. Dimension*.

[2]Irmgard Palladino in *Gläubige mitreißen, Ungläubige überwältigen, Die Kuppeln von Rom.*

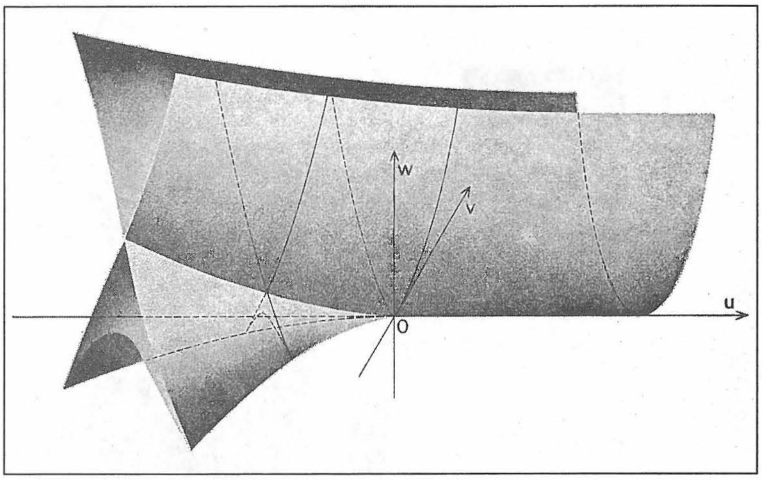


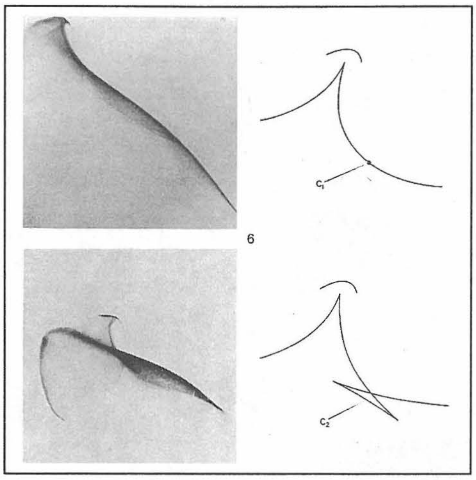
Dalí und Raffael.

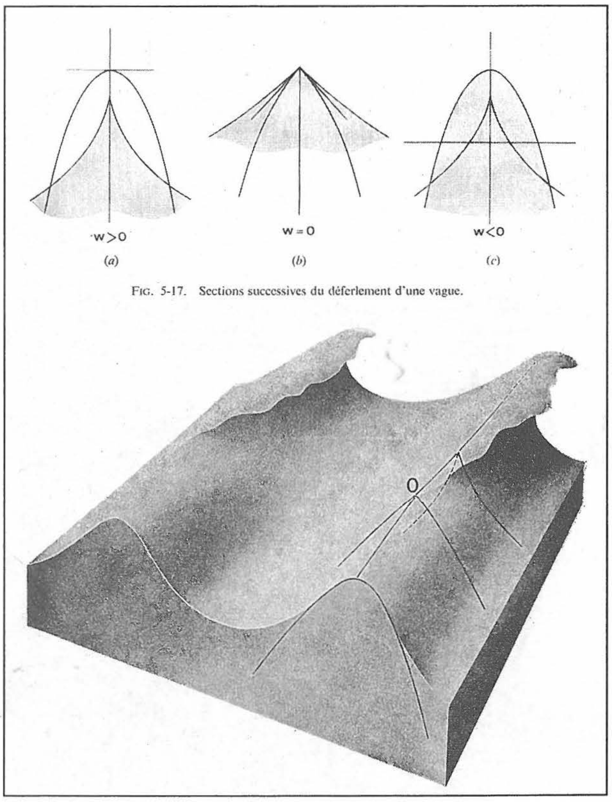


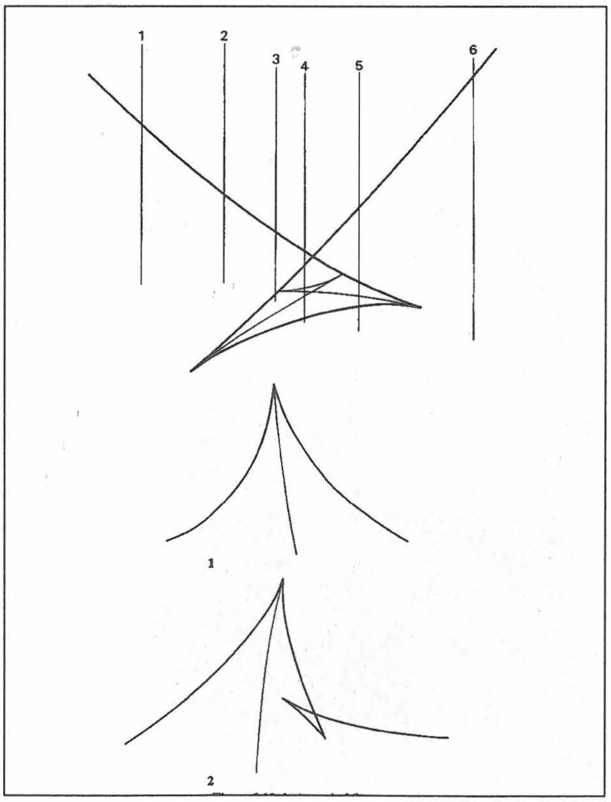
Dalí: Auf der Suche nach der 4. Dimension.

1972 erscheint ein merkwürdiges Buch, geschrieben vom französischen Mathematiker René Thom. Es hat den eigenartigen Titel *Stabilité structurelle et morphogénèse*. In diesem *Versuch einer allgemeinen Modelltheorie* – so der Untertitel des Werkes – untersucht Thom mathematische Beziehungen, die den plötzlichen Umschlag von einem Zustand in einen anderen Zustand beschreiben so, wenn Wasser plötzlich zu Eis friert, oder Wasser verdampft, und ähnliches. Die Fachsprache der Mathematik kennt dafür die Ausdrücke *singuläre Stellen, singuläre Flächen.* Thoms Buch ist mit einer Fülle interessanter Bilder ausgestattet, Überschlag von Meereswellen in der Brandung; Brennflächen in der geometrischen Optik, die z. B. bei der Aussendung von Lichtstrahlen im Autoscheinwerfer entstehen. René Thom beschreibt den Umschlag durch mathematische Gleichungen, die sich als Flächen darstellen lassen. Eine nennt er z. B. *Schwalbenschwanz*, eine andere *Schmetterling.* (Das sind nicht die Schmetterlinge, die Wirbelstürme auslösen, solche Schmetterlinge flattern nur in Utopia). Thom prägt für seine von ihm untersuchten Zustandsänderungen den Namen „Katastrophen“, catastrophe élementaire, u. s. w. Als „Katastrophentheorie“ läuft die von Thoms Buch ausgelöste seismische Welle durch die Medien. Thom ist darüber nicht glücklich, denn seine „Katastrophen“ haben mit unseren „Lebenskatastrophen“ wenig zu tun.





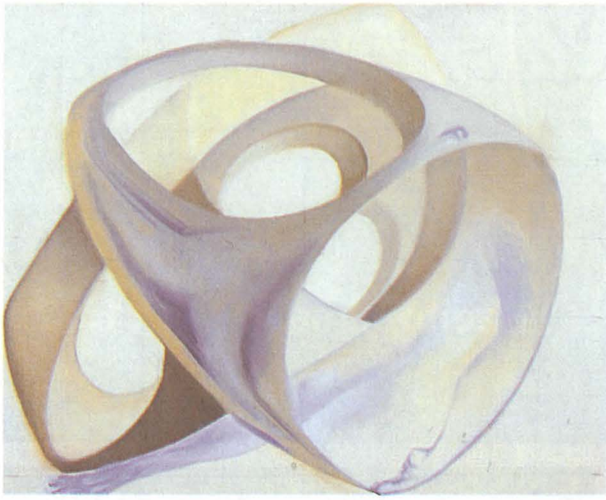




Aus René Thoms Buch.

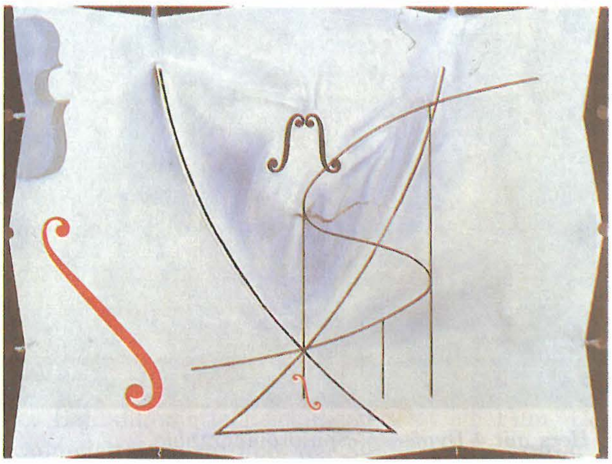
Dalí gerät an Thoms Buch, er ist hingerissen, immer wieder läßt er sich daraus vorlesen. Dalí malt jetzt nur noch René Thoms Bilder. Eines seiner letzten trägt den Titel *Topologische Loslösung Europas, Hommage à René Thom*; unten die von Dalí hingeschriebenen mathematischen Formeln für den Schwalbenschwanz.

Topologische Verrenkung – Bett und zwei Nachtschränkchen greifen brutal ein Violoncello an.



Topologische Verrenkung einer weiblichen Figur.

Topologische Verrenkung einer Frauenfigur zu einem Violoncello.

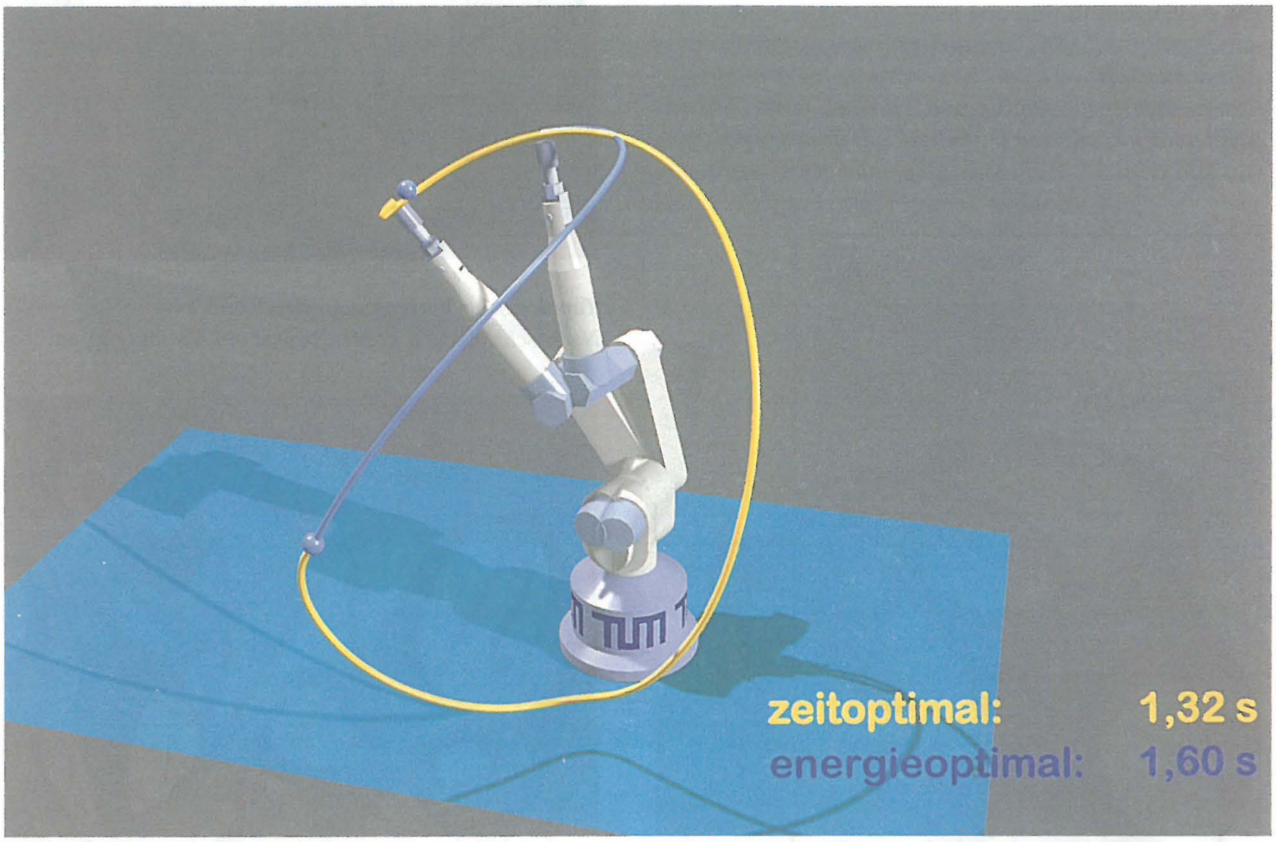


Dalís letztes Bild: Der Schwalbenschwanz.

Topologische Loslösung Europas – Hommage à René Thom.

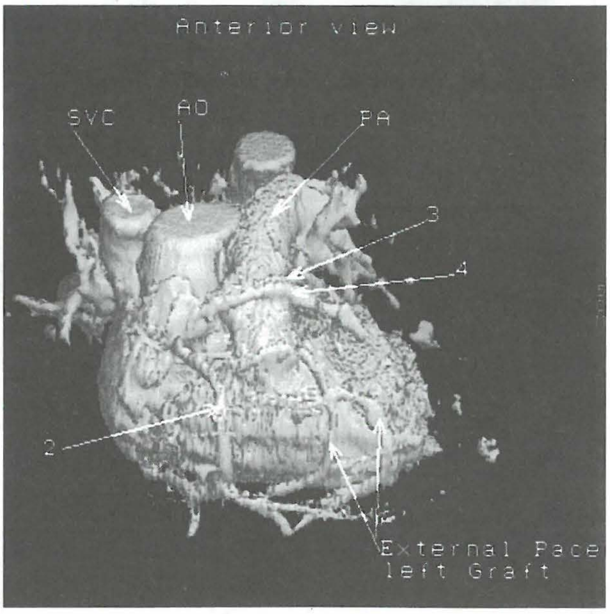
Jetzt haben uns die Bilder der Bibel und ihre Speicherung auf den neuen Chips in die Kunst entführt. Aber es gibt nicht nur Chips, es gibt auch Autos.

Autos werden heute von Robotern montiert. Wie soll sich ein solcher Roboter bewegen: Soll der Roboterarm möglichst schnell von einem Punkt zum andern fahren, oder soll er es mit möglichst wenig Energie tun. Eine Frage der Mathematik. Der Roboter wird in mathematische Gleichungen, in Differentialgleichungen „aufgelöst“. Und die Aufgabe wird zu einer Aufgabe der optimalen Steuerung. Die mathematische Lösung sehen wir uns im Film an.



Optimale Roboterbahnen

Man kann heute in einen menschlichen Körper „hineinsehen“. Eine Röntgenröhre umfährt langsam den Körper, spiralförmig, eigentlich wendelförmig, und sendet dabei einen fächerförmigen schwachen Strahl aus. Der Röntgenstrahl wird im Körperinneren gebeugt, abgelenkt, in seiner Intensität verändert. Auf einem der Röhre gegenüberliegenden ringförmigen Bildschirm erzeugt der Strahl ein „geisterhaftes“ schwarz-weiß-Muster. Man kennt das von der „alten“ Röntgenographie her. Bei dem neuen Gerät besteht der Bildschirm allerdings aus Strahlendetektoren, die die Absorptionsstärke des Röntgenstrahls im menschlichen Körper quantitativ messen. Die Detektoren leiten ihre Information an einen Elektronenrechner weiter; der kann nun aus der Intensitätsverteilung des Strahls ein getreues Abbild des menschlichen Körpers reproduzieren. Eine phantastische Sache, und die Physiker McCormack und Brounsfield haben dafür mit Recht 1979 den Nobel-Preis für Medizin erhalten. Man nennt das *Computertomographie.*

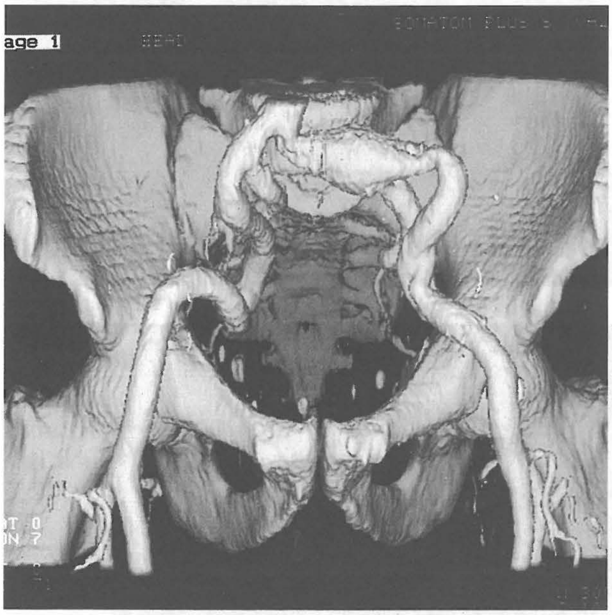


Herz mit 4 Bypässen. Spiraltomographie.
(Werkbild Siemens)

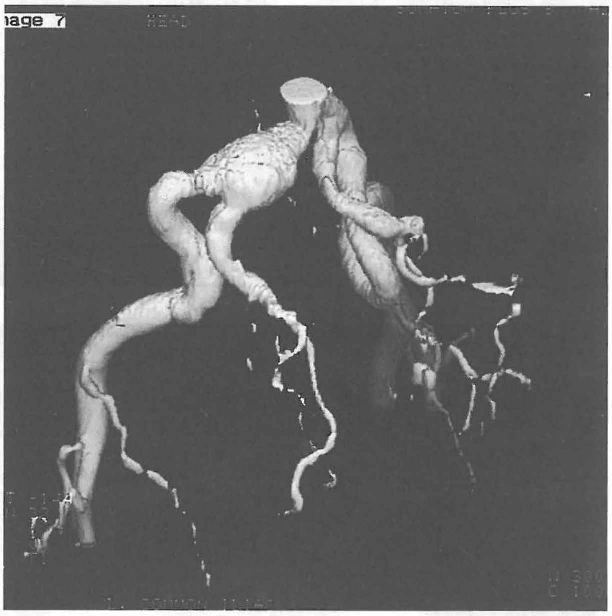
In der Sprache der Mathematik liest sich das so: Das Innenbild des menschlichen Körpers ist eine unbekannte Funktion. Von dieser Funktion kennt man nur ein (schwaches) Abbild, eine Art Geisterbild, auf den Detektoren, das durch den Röntgenstrahl erzeugt wird. Dieses Geisterbild ist aber zufällig das Linienintegral über das Innenbild, die unbekannte Funktion; und die Röntgenröhre baut beim Umfahren des Körpers das Linienintegral auf. Nun das große Problem: Wie erhält man aus dem Linienintegral die unbekannte Funktion zurück? Gelingt das, dann kann man auch aus dem Geisterbild wieder das richtige Bild erzeugen, also in den Körper „hineinsehen".

Der Mathematiker Radon aus dem böhmischen Tetschen, er starb 1956, hat vom Nobel-Preis nichts gehabt. Er war es, der schon 1917 das Problem mathematisch behandelt hat. Computertomographie ist mathematisch nichts anderes als die Umkehrung der Radon-Transformation. Niemand spricht von Radon, Computertomographie wird überhaupt nicht mit Mathematik in Verbindung gebracht.

Inzwischen kennt man auch die Kernspintomographie, Magnetresonanztomographie: Gewaltige, supraleitende, ringförmig um den menschlichen Körper angeordnete Magnete erzeugen starke Magnetfelder, richten die Spinachsen der Wasserstoffatome im menschlichen Körper aus, die Intensität der davon ausgehenden Impulse wird gemessen und dann wie oben ein Bild des Körperinnern produziert. Bau und Berechnung der Magnete waren schwierig, Magnete und Magnetfelder wurden u. a. mit Hilfe der Legendreschen elliptischen Integrale berechnet.



Beckenbereich. Spiraltomographie. (Werkbild Siemens)

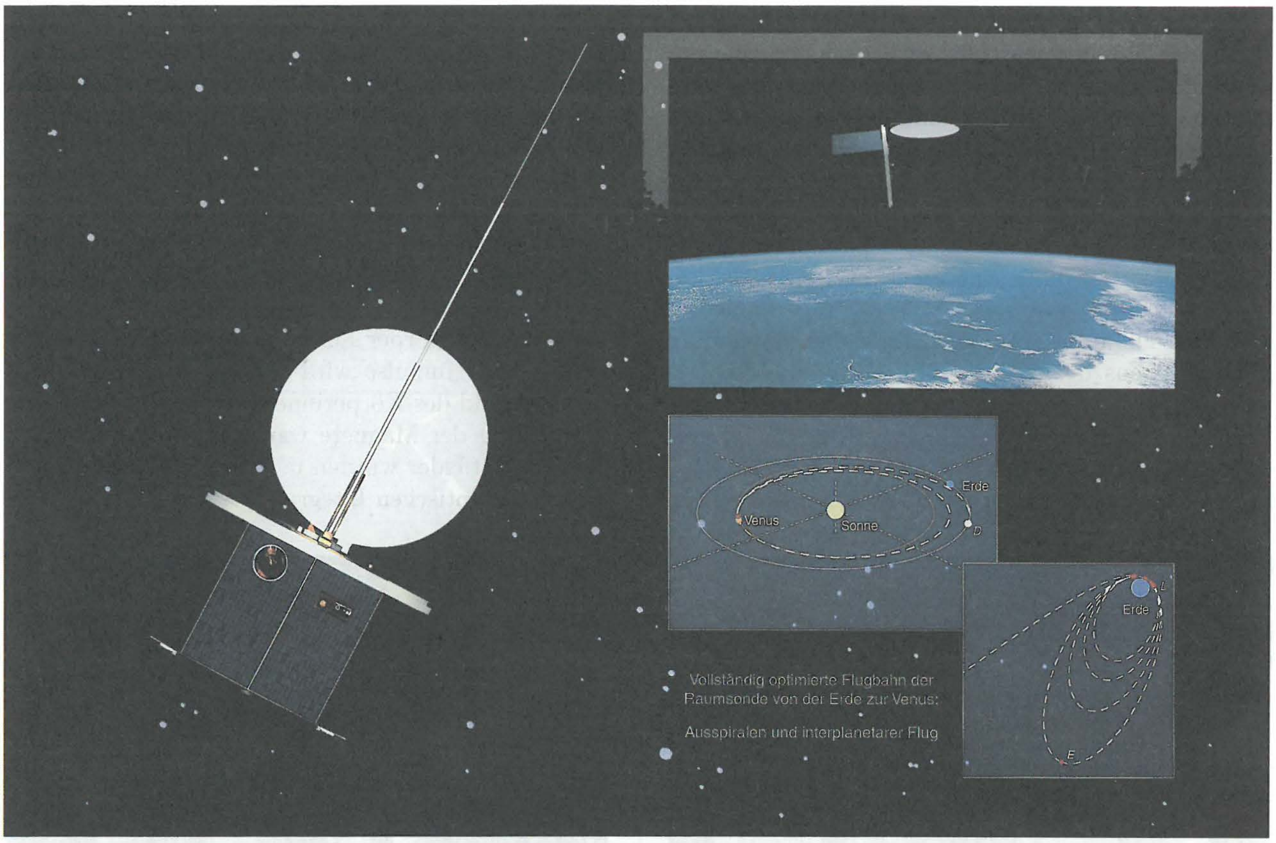


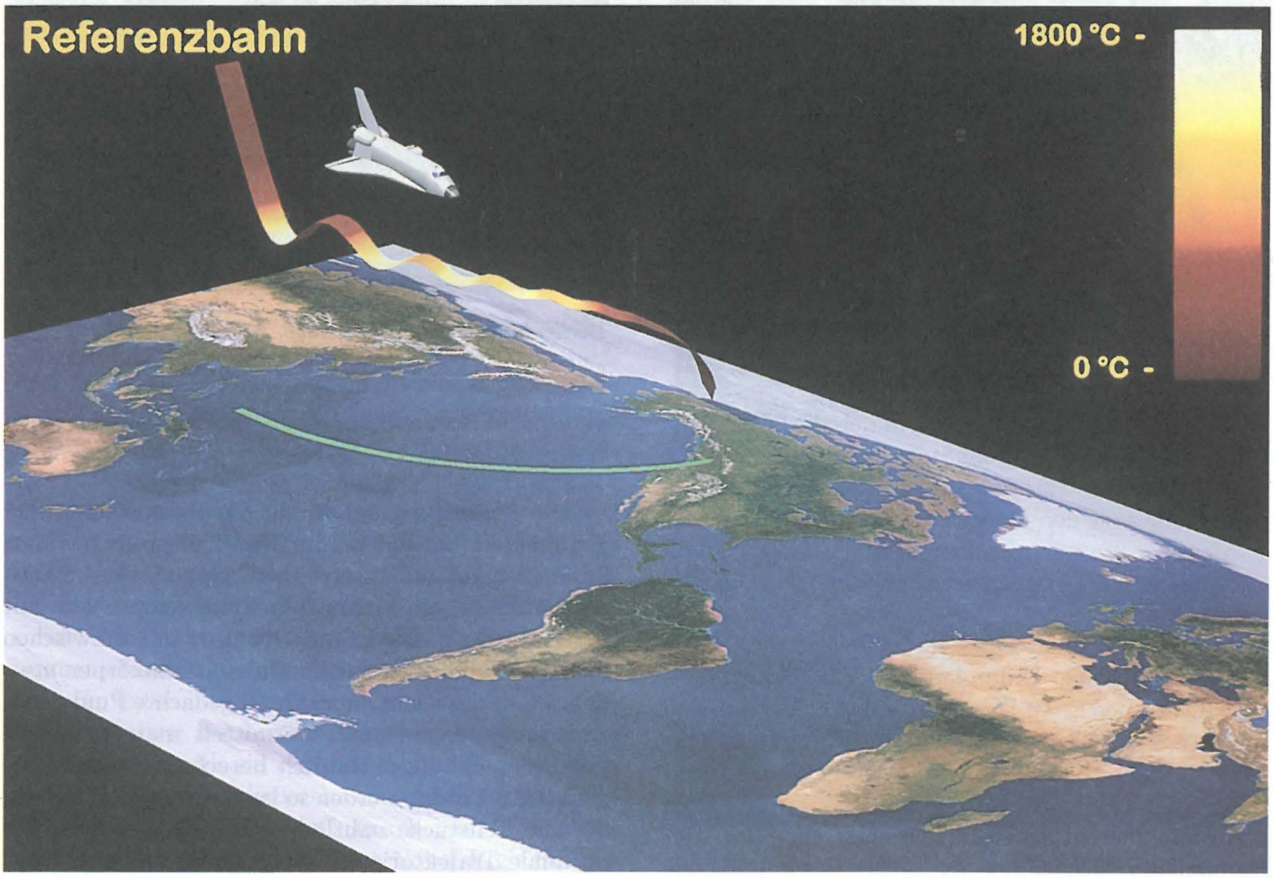
Beckenbereich, nur Blutgefäße, Knochen „ausgeblendet". Spiraltomographie. (Werkbild Siemens)

Bedeutsame Anwendungen findet die Mathematik in der Raumfahrt. Vom Start der Raketen bis zur Übermittlung und störungsfreien Rekonstruktion der Bilder, die von den Raumsonden zur Erde gefunkt werden, wird in unvorstellbarem Maße von kunstvoll ersonnenen mathematischen Methoden Gebrauch gemacht.

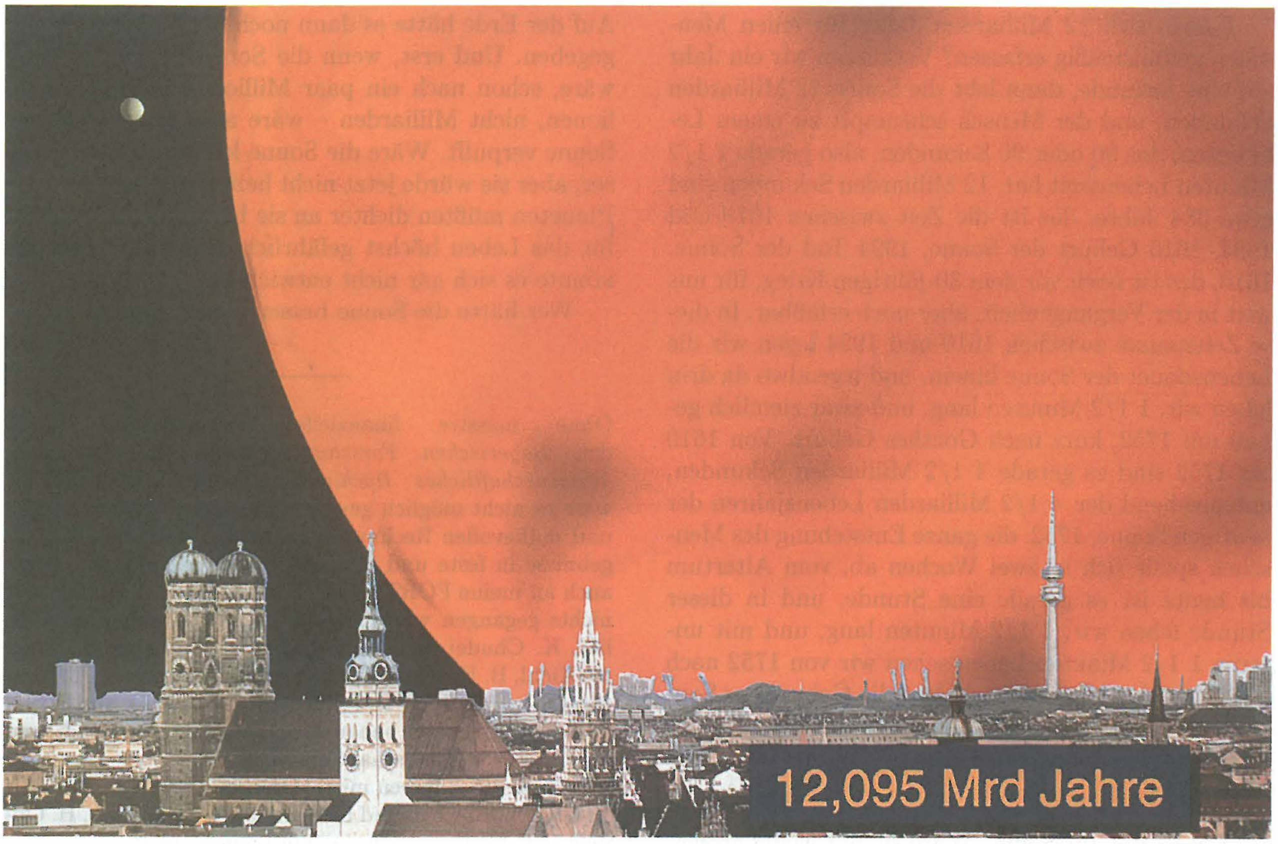
Sichere Rückkehr eines Raumgleiters, des Space Shuttles, aus seiner Erdumlaufbahn zurück zum Landeplatz auf der Erde. Die Bahn soll so verlaufen, daß sie dem Fahrzeug beste Manövrierfähigkeiten verleiht und die Außenhaut des Fahrzeugs nicht heißer werden läßt als 1000 Grad Celsius. Die Lösungen der Bahndifferentialgleichungen zeigt ein Film. Der Raumgleiter taucht über der Südsee in die Lufthülle der Erde ein, fliegt auf leicht oszillierenden Bahnen weit nach Norden, um dann in der kalifornischen Wüste zu landen.

Die Ermittlung der Bahn, die Raumsonden fliegen müssen, um mit minimalem Treibstoffverbrauch ihren Zielplaneten zu erreichen, ist eine mathematische Aufgabe, ein Mehrpunkt-Randwertproblem mit freien Rändern. Die Lösung erhält man so: Zwischen der Erde und dem anzusteuernden Raumkörper, etwa dem Planeten Venus, steckt man gedachte Punkte ab. Zwischen diesen Punkten ermittelt man Teilstücke der Bahn, die algorithmisch berechnet werden. Die gedachten Punkte werden so lange iterativ verändert, bis alle Teilstücke nahtlos aneinanderschließen. Die optimale Trajektorie, die Flugbahn der Raumsonde, ist fertig!





Optimale Bremsbahn eines Raumgleiters in der Lufthülle der Erde.



Sonne am Ende ihres Lebenszyklus in ca. 7 1/2 Milliarden Jahren. Der Planet links ist der Merkur in seinem heutigen Abstand.

Die optimale Flugbahn zum Planeten Venus im Film. Wir sehen uns nicht nur die Flugbahn zur Venus, sondern Venus selbst an: Am 4. Mai 1989 wurde die Raumsonde MAGELLAN auf den Weg zur Venus geschickt. Fast optimal gesteuert, erreichte sie Venus auf einer suboptimalen Flugbahn 15 Monate später am 10. August 1990. Ferngelenkt von der Erde über die Signale der drei riesigen Antennen des Weltraumfunknetzes der NASA, begann MAGELLAN im September 1990 mit der Kartierung der Venus durch Radar. Das Spezial-Radar hatte eine hohe Auflösung: Zwischen 30x30 m und 100x100 m. Wellenlänge der Radarfrequenzen: 3,1 bis 23,9 cm, 3 Frequenzen werden benützt, 1000 Pulse/Sekunde. Bildübertragung zur Erde auf den Frequenzen 2115 ±5 MHz (S-Band) und 8422 ±20 MHz (X-Band). Ganz gewiß hätte sich einer für die Bilder von der Venus höchst interessiert: Goethe. Er hatte sie als Morgenstern, als *Phosphoros*, sogar in sein Wappen schlagen lassen.

Für uns ist die Sonne der wichtigste Stern. Tief im Sonneninnern wird Wasserstoff zu Helium verbrannt, dabei entsteht Energie in Form kurzwelliger Röntgenstrahlung. In jeder Sekunde werden 4 Millionen Tonnen in Strahlung umgewandelt, und in jeder Sekunde wird die Sonne um 4 Millionen Tonnen leichter. Aber die Sonne ist so riesig, selbst nach Milliarden Jahren ist der Verlust für sie ganz klein.

Der Zustand der Sonne wird durch Naturgesetze beschrieben: ein System von partiellen Differentialgleichungen vom parabolischen Typ. Nimmt man ein paar feste Kenngrößen hinzu, etwa die Masse, die der Stern am Beginn seines Lebens beim Zünden der Kernfusion in seinem Innern haben soll, entsteht eine mathematisch lösbare Aufgabe. Rund viereinhalb Milliarden Jahre lebt die Sonne schon; die Rechnungen zeigen, daß sie noch lange gleichmäßig leuchten wird, aber Leben wird die Erde nur noch höchstens 1 1/2 Milliarden Jahre tragen können, dann wird es so heiß, daß die Weltmeere verdampfen. Die Sonne wird aber noch 5 Milliarden Jahre leuchten, vor ihrem Ende wird sie sich zu einem rötlich leuchtenden Riesenstern ausdehnen, der, von der Erde ausgesehen, fast den halben Himmel einnehmen und so groß wie die Merkurbahn sein wird.

Das Leben der Sonne im Film. Der Film komprimiert die 12 Milliarden Lebensjahre der Sonne auf zwei Minuten. Das Leben eines hundertjährigen Menschen dauert gerade 1 Millionstel Sekunde. Der Film zeigt die Lösungen eines hochnichtlinearen Systems von partiellen Differentialgleichungen vom parabolischen Typus für ein freies Randwertproblem mit 3 freien Rändern. Und diese Lösungen beschreiben das Leben der Sonne.

Lassen sich 12 Milliarden Jahre für einen Menschen gefühlsmäßig erfassen? Verkürzen wir ein Jahr auf eine Sekunde, dann lebt die Sonne 12 Milliarden Sekunden, und der Mensch schrumpft zu einem Lebewesen, das 80 oder 90 Sekunden, also gerade 1 1/2 Minuten Lebenszeit hat. 12 Milliarden Sekunden sind etwa 384 Jahre, das ist die Zeit zwischen 1610 und 1994. 1610 Geburt der Sonne, 1994 Tod der Sonne. 1610, das ist noch vor dem 30-jährigen Krieg, für uns weit in der Vergangenheit, aber noch erfaßbar. In diese Zeitspanne zwischen 1610 und 1994 legen wir die Lebensdauer der Sonne hinein, und irgendwo da drin leben wir, 1 1/2 Minuten lang, und zwar ziemlich genau um 1752, kurz nach Goethes Geburt. Von 1610 bis 1752 sind es gerade 4 1/2 Milliarden Sekunden, entsprechend den 4 1/2 Milliarden Lebensjahren der heutigen Sonne. 1752, die ganze Entstehung des Menschen spielt sich in zwei Wochen ab, vom Altertum bis heute ist es gerade eine Stunde, und in dieser Stunde leben wir, 1 1/2 Minuten lang, und mit unseren 1 1/2 Minuten Leben sehen wir von 1752 nach 1610 zurück und ahnen, wie fern die Geburt der Sonne zurückliegt, und sehen in die Zukunft bis 1994, bis zum Tod der Sonne, aber das ist für uns unendlich weit weg.

Ein letztes zur Sonne. Wäre sie nur wenig größer, würde sie, die Lösungen der mathematischen Gleichungen zeigen es, so schnell brennen, daß sich gar kein Leben auf einem Planeten entwickeln könnte. Bei nur 20% größerem Durchmesser, das ist nicht viel, wäre schon nach 1 Milliarde Jahren alles vorbei. Auf der Erde hätte es dann noch nicht einmal Algen gegeben. Und erst, wenn die Sonne 10 mal so groß wäre, schon nach ein paar Millionen Jahren – Millionen, nicht Milliarden – wäre aller Brennstoff der Sonne verpufft. Wäre die Sonne kleiner, wäre es besser, aber sie würde jetzt nicht heiß genug sein und die Planeten müßten dichter an sie heran, das aber wäre für das Leben höchst gefährlich und wahrscheinlich könnte es sich gar nicht entwickeln.

Wer hätte die Sonne besser bauen können?

Ohne massive finanzielle Unterstützung durch den *Bayerischen Forschungsverbund für Technisch-Wissenschaftliches Hochleistungsrechnen* FORTWIHR wäre es nicht möglich gewesen, die vielen umfangreichen und mühevollen Rechnungen durchzuführen und die Ergebnisse in feste und laufende Bilder umzusetzen. Dank auch an meine FORTWIHR-Gruppe, ohne deren Einsatz nichts gegangen wäre: M. Alefeld, M. Breitner, R. Callies, K. Chudej, G. Denk, J. Haber, A. Heim, B. Jung, M. Kiehl, B. Koslik, B. Kugelmann, F. Montrone, T. Neumeyer, J. Reiter, K.-D. Reinsch, P. Selting, O. von Stryk, L. Walsh. Geholfen haben P. Rentrop in Darmstadt und H.-J. Pesch in Clausthal-Zellerfeld.

Unterstützt haben mich Mitarbeiter der Siemens AG: A. Gilg in München und H. Brunner, W. Kalender, H. Oppelt in Erlangen. Auch dorthin mein Dank.

Adresse des Autors:
Prof. Dr. Roland Bulirsch
Mathematisches Institut der
Technischen Universität München
80290 München